Inhoudsopgave

2 Basiskennis

2.1 Wat leer je in dit hoofdstuk

Dit hoofdstuk gaat over kennis die nodig is om de rest van deze cursus te kunnen volgen. Sommigen zullen het kunnen overslaan. Anderen zullen het af en toe gebruiken om iets op te zoeken en weer anderen zullen het echt nodig hebben om hun kennis bij te spijkeren.

Radio is toegepaste natuurkunde. In de natuurkunde draait het om processen. In een zender speelt zich onder meer het proces af van de omzetting van geluidsenergie in radiogolven. In een ontvanger gebeurt het omgekeerde.

Bij natuurkundige processen horen getallen, eenheden en grootheden. Daar beginnen we mee. Je maakt kennis met het SI-eenhedenstelsel dat in de wereld veruit het wijdst verbreide stelsel is. Daar hoort een schrijfwijze bij. Een beetje rekenwerk hoort er ook bij.

We gaan daarna verder met “gewone” breuken en tiendelige breuken. Die worden gevolgd door kwadraten en (vierkants)wortels.

Het kunnen aflezen van grafieken hoort ook in het gereedschapskistje voor het N-examen. Daarmee hebben we de examenkennis voor wat betreft het rekenwerk gehad.

2.2 Rekenmachine

De wiskunde die je nodig hebt voor het zendexamen is niet meer dan wat in dit hoofdstuk wordt behandeld. Het rekenwerk dat erbij hoort, kun je misschien zonder rekenmachine af. Toch is bij het examen een **niet-programmeerbare** zakrekenmachine toegestaan. Het examenreglement staat op de site van de Stichting Radio Examens, https://radio-examen.nl/. Als je een rekenmachine niet zo gewend bent en niet erg goed bent in hoofdrekenen, train jezelf dan op zo’n ding. Op het examen heb je per opgave gemiddeld maar enkele minuten!

2.3 Navigeren bij de opgaven

In deze cursus kom je af en toe opgaven tegen. Daarmee kun je je opgedane kennis toetsen. In dit hoofdstuk zijn dat de enige opgaven. Bij volgende hoofdstukken vind je ook echte examenopgaven. In elk hoofdstuk zelf zitten opgaven van dezelfde soort en hetzelfde niveau als examenopgaven, maar ze zijn daar lang niet altijd uit overgenomen.

In alle opgavenbestanden gebruiken we dezelfde navigatiesymbolen. Het zijn er drie. De eerste is deze:

Je vindt hem onder de opgave. Klik erop als je denkt, het goede antwoord te weten en hij stuurt je naar de uitwerking en/of het antwoord.

Onder de uitwerking/het antwoord vind je in elk geval deze:

Terug naar de opgave

Klik erop en je gaat terug naar de opgave. Hij maakt terugscrollen overbodig.

Als er nog een volgende opgave in het rijtje is, kun je daar met één muisklik naartoe via deze:

Naar de volgende opgave

De groene pijl zal ontbreken onder de uitwerking van de laatste opgave van een rijtje. Anders staat hij er samen met de rode pijl “terug naar de opgave”. Dit systeem hanteren we door de hele cursus.

Bij een uitwerking herhalen we altijd de opgave, want de oorspronkelijke opgave is dan buiten zicht. De uitwerking staat onder het vetgedrukte kopje **Uitwerking**.

2.4 Getallen, eenheden en grootheden

2.4.1 Inleiding

Rekenen hoort bij wiskunde. Rekenen gaat over getallen en grootheden. Getallen zijn ongrijpbaar. Ze krijgen pas betekenis als je ze verbindt met iets uit de echte wereld. Bij een getal als 4 kun je je pas iets voorstellen als het getal op iets betrekking heeft, bijvoorbeeld ‘vier wielen’. Kinderen op de basisschool rekenen in het begin niet voor niets op hun tien vingers. Het telraam is ook zo’n vorm van rekenen.

In de natuurkunde verbinden we getallen met eenheden. Uitdrukkingen als ‘acht meter’ of ‘twintig seconden’ zeggen ons iets. ‘Acht meter’ drukt een lengte uit, ‘twintig seconden’ een tijdsduur. De meter en de seconde zijn hier de *eenheden*. De combinatie van een getal en een eenheid heet *grootheid*. Woorden als ‘lengte’ en ‘tijdsduur’ duiden ook een grootheid aan, want je geeft ze aan met een getal en een eenheid. Een zin als ‘dit pad is 900 lang’ betekent niets; ’dit pad is 900 meter lang’ wel. Een grootheid kun je meten en dat doe je in eenheden. Kijk bijvoorbeeld eens op http://www.dr-aart.nl/Meetkunde-grootheden-en-eenheden.html.

2.4.2 Eenhedenstelsels

De mens heeft eenheden georganiseerd in stelsels. Een modern stelsel werkt met het getal 10 (0,1; 1; 10; 100; 1000, enz.). Eenheden als 12 inch in een voet, 3 voet in een yard, 220 yard in een furlong en 8 furlong in een mijl maken het rekenen lastig. Meters en kilometers gaan veel gemakkelijker. We zijn nu eenmaal gewend aan het tientallig stelsel.

De bedoeling van een eenhedenstelsel is vooral dat voor de uitkomst van berekeningen zo min mogelijk omrekeningsgetallen hoeven te worden gebruikt. Eenheden van een stelsel moeten op elkaar aansluiten. Sinds 1960 gebruikt men wereldwijd, behalve in de Verenigde Staten, Liberia en Myanmar, het *SI-eenhedenstelsel*. SI is een afkorting van de Franse benaming *Système international d'unités*, ofwel Internationaal Eenhedenstelsel. Het is sinds 1978 in Nederland het enige toegelaten stelsel. Wie er meer van wil weten kan bijvoorbeeld terecht op Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/SI-stelsel) en/of https://nl.wikipedia.org/wiki/Natuurkundige_grootheden_en_eenheden.

2.4.3 Basiseenheden in het SI-stelsel

Het SI-stelsel is gebaseerd op zeven onafhankelijke basiseenheden. 'Onafhankelijk' wil zeggen dat ze niet uit elkaar zijn af te leiden. Ze staan met de grootheden waarop ze betrekking hebben en hun standaardafkortingen in Tabel 2.4-1.

Tabel 2.4-1. Basiseenheden in het SI-stelsel. Grijs gedrukt: eenheden die in deze cursus niet voorkomen.

Grootheid	SI-basiseenheid	
	Naam	**Afkorting**
Lengte	meter	m
Massa	kilogram	kg
Tijd	seconde	s
Elektrische stroom	Ampère	A
Temperatuur	Kelvin	K
Hoeveelheid van een stof	mol	mol
Lichtsterkte	candela	cd

Opmerkingen bij Tabel 2.4-1

- Met mol en candela krijgen we in deze cursus niet te maken. Daarom zijn ze in grijs aangegeven.
- Een K is even groot als een graad Celsius (ºC). Het verschil is het nulpunt.
  0 K = -273,14 ºC Dat is het *absolute nulpunt.* Bij die temperatuur is de warmte-energie nul (0). Kouder kan niet, vandaar de naam. Vaak wordt 0 K afgerond op -273 ºC. Als het over **verschillen** in temperatuur gaat, maakt het niet uit welke van de twee je gebruikt. In de dagelijkse praktijk zien we de ºC veel vaker dan de K.
- Eenheden die naar een persoon zijn genoemd, worden afgekort met een hoofdletter, alle andere met een kleine. Voorbeelden van de eerste zijn Ampère en Kelvin, van de tweede de meter.

2.4.4 Voorvoegsels

Grootheden kunnen variëren tussen triljoenen eenheden of meer en triljoensten van een eenheid of nog kleiner. In plaats van getallen met veel nullen gebruiken we voorvoegsels zoals nano, micro, mega of giga. Ook die zijn internationaal gestandaardiseerd. Ze worden gebruikt bij SI-eenheden, maar ook bij andere. Een voorvoegsel praat en leest gemakkelijker dan grote getallen, want er hoeven geen grote aantallen nullen te worden geteld. In Tabel 2.4-2 staan de meeste opgenoemd. Er zijn nog grotere en nog kleinere, maar in de radiotechniek gebruiken we die eigenlijk nooit. Geïnteresseerden kunnen ze vinden op Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/SI-voorvoegsel).

Tabel 2.4-2. Voorvoegsels in eenhedenstelsels

Voor-voegsel	Symbool	Getal	In cijfers	10^n
exa	E	triljoen	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	biljard	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	biljoen	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	miljard	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	miljoen	1 000 000	10^{6}
kilo	k	duizend	1 000	10^{3}
hecto	h	honderd	100	10^{2}
deca	da	tien	10	10^{1}
-			1	10^{0}
deci	d	een tiende	0,1	10^{-1}
centi	c	een honderdste	0,01	10^{-2}
milli	m	een duizendste	0,001	10^{-3}
micro	µ	een miljoenste	0, 000 001	10^{-6}
nano	n	een miljardste	0, 000 000 001	10^{-9}

pico	p	een biljoenste	0, 000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	een biljardste	0, 000 000 000 000 001	10^{-15}
atto	a	een triljoenste	0, 000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Opmerkingen bij Tabel 2.4-2

- De meest rechtse kolom met de kop 10^n zal niet voor iedereen gesneden koek zijn. Het klein gedrukte getalletje rechts boven de 10 is de *macht*. Een ander woord ervoor is de *exponent*. Voor nu is het genoeg om te weten dat de exponent van het getal 10 het aantal nullen rechts van de 1 aangeeft. 10^0 is dus gelijk aan 1, 10^6 aan 1 000 000, of in letters: een miljoen. Je spreekt het naar keuze uit als “tien tot de macht zes” of “tien tot de zesde”. Als voor de exponent een minteken staat, betekent dat evenveel nullen links van de 1 met de komma rechts van de meest linkse 0. Dus 10^{-6} = 0,000 001 ofwel één miljoenste, uitgesproken als ‘tien tot de macht min zes’ of ‘tien tot de min zesde’. Cijfers ’achter de komma’ behandelen we bij de tiendelige breuken.
- Kijk uit met *miljard* (10^9), *biljard* (10^{15}), enz. In Engelstalige teksten kent men het achtervoegsel -*jard* niet, alleen maar -*joen*. Bij ‘a billiard’ denkt men aan een biljarttafel. Een miljard is daar *a billion* en wat wij een biljoen (10^{12}) noemen wordt *a trillion*, enzovoort. Internationaal standaardiseren is lastig.
- De cijfers in de kolom ‘in cijfers’ zijn verdeeld in blokjes van drie met een spatie (lege positie) ertussenin. Dat vergemakkelijkt het tellen. Meer betekenis heeft het niet. Soms zet men in plaats van de spatie een punt. Dat kan verwarrend zijn, omdat in sommige Engelstalige landen een punt wordt geschreven in plaats van onze komma. Ook de meeste zakrekenmachines doen dat (helaas!). Om de verwarring nog wat te vergroten, worden komma’s dan vaak gebruikt als scheidingsteken tussen de blokjes van drie. Bij het zendexamen houdt men zich aan de Europese standaard.
- Alle voorvoegsels hebben kleine letters als ze voluit worden geschreven. De voorvoegsels ‘kilo’ en kleiner worden afgekort met een kleine letter, alle grotere met een hoofdletter. Een mm en een Mm zijn dus niet hetzelfde. Een mm is een millimeter, het duizendste deel van een meter. Een Mm is een megameter, dat is 1 miljoen meter, ofwel 1000 km.
- Er staat één Griekse letter in de lijst. Dat is de ‘µ’ (spreek uit: ‘mu’), de afkorting van ‘micro’. In oudere teksten vind je hem soms terug als ‘u’. De hoofdoorzaak is het ontbreken van Griekse letters op ouderwetse typemachines. De ‘u’ lijkt dan nog het meest op de ‘µ’.
- De vergrotende voorvoegsels ‘mega’ en hoger eindigen op een *a*, ‘kilo’ en lager op een *o*. ‘milli’, ’centi’, ‘deci’ en ‘deca’ zijn uitzonderingen en erfenissen uit vroeger tijden.

- Het enige tweelettervoorvoegsel ‘da’ (maal 10) wordt tegenwoordig afgeraden. Het is in een systeem met stappen van drie nullen voor of achter de komma ook onnodig. Dat geldt ook voor de voorvoegsels ‘h’, ‘d’ en ‘c’. Je ziet ze nog wel in sommige eenheden, zoals ha (hectare, geen SI-eenheid), dm (decimeter) en cm (centimeter). In de radiotechniek kom je ze nauwelijks (meer) tegen.
- De kilogram (kg) is met zijn voorvoegsel ‘k’ eigenlijk een rare basiseenheid. Ook dat is een erfenis. Die komt uit de tijd waarin een eenhedenstelsel werd gebruikt met de gram (g) als eenheid van massa. 1 000 000 kg is daarom niet een Mkg, maar een Gg (gigagram). In het spraakgebruik hebben we het dan vaak over 1000 ton, maar de ton (1000 kg) is geen officiële SI-eenheid.
- Je gebruikt de voorvoegsels het liefst zo, dat de bijbehorende getallen kleiner dan 1000 en groter dan 0,001 zijn. Voorbeeld: ’10 000 m’ mag best, maar schrijf liever ‘10 km’.
- Probeer liever niet om dit alles uit je hoofd te leren. Het went in de praktijk vanzelf.

Met de eenheden voor tijd is men minder consequent geweest. Er zitten nog steeds 60 seconden in een minuut, 60 minuten in een uur en 24 uren in een dag (etmaal). Daar is niets tientalligs aan. Vooral daarom wordt vooral de eenheid uur nog steeds gebruikt, al is de seconde (s) de officiële SI-eenheid. Het uur wordt internationaal afgekort tot h (van het Latijnse *hora* voor *uur*). Een uur is dus 3600 s of 3,6 ks. Vrijwel niemand zegt dat.

De eenheid minuut gebruiken we in de natuurkunde weinig. De afkorting is meestal ‘min’, maar ‘minuut’ wordt ook wel eens voluit geschreven.

Uren, minuten en seconden zijn een erfenis uit de Babylonische beschaving, zo’n 4000 jaar geleden. Toen gebruikte men in plaats van het tientallig stelsel het zestigtallige, in de vorm van een combinatie van vijf- en twaalftallig. De verdeling van de cirkel in 360 graden (6 maal 60) hoort ook bij die erfenis.

2.4.5 Afgeleide eenheden

Afgeleide eenheden zijn combinaties van basiseenheden. Snelheid bijvoorbeeld is lengte per tijd. Die kun je uitdrukken in meter per seconde (m/s) of km/uur (km/h). We zullen in de loop van deze cursus verschillende afgeleide eenheden tegenkomen.

2.4.6 Samengevat

- Getallen hebben in de natuurkunde en dus ook in de radiotechniek pas betekenis als ze met een eenheid worden gecombineerd tot een grootheid.
- We gebruiken basiseenheden die tot het SI-stelsel behoren of eenheden die daarvan zijn afgeleid, met hun officiële afkortingen.
- Heel grote of heel kleine eenheden schrijven we met voorvoegsels volgens Tabel 2.4-2.

2.5 Opgaven

2.5.1 Opgave 2-1

In de zin 'De seconde duurt één seconde' staan

a. Twee eenheden

b. Twee grootheden

c. Eerst een eenheid en daarna een grootheid

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.2 Opgave 2-2

Waarom kort men de minuut niet af met 'm'?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.3 Opgave 2-3

Welke voorvoegsels horen bij een biljoen en bij een biljoenste?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.4 Opgave 2-4

Een bekende lengte-eenheid (maar geen SI-eenheid) die voor afstanden bij atomen en moleculen soms wordt gebruikt, is de ångström (ongeveer uitgesproken als 'ongstreum'), afgekort Å. 1Å is 100 pm. Hoeveel nm is dat? En hoeveel fm?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.5 Opgave 2-5

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 miljoen km. Hoeveel m is dat? En hoeveel Gm?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.6 Schrijfwijze van getallen, eenheden, grootheden en symbolen

In de natuurkunde schrijven we vaak in symbolen. Dat is kort en alles blijft overzichtelijk. Voor wie daar niet aan gewend is, lijkt het in het begin misschien lastig, maar het went snel. Symbolen zijn nuttig als de getalswaarde ervan niet bij voorbaat vaststaat. Als een getal bijvoorbeeld met n wordt weergegeven, betekent dit dat het alle denkbare waarden kan hebben. Je kunt bijvoorbeeld n munten in de portemonnee hebben. Als je er twee uitgeeft, heb je er vanaf dat ogenblik $n-2$ in zitten. Dat geldt voor alle waarden van n van 2 of meer, want minder dan 0 munten in de portemonnee kan niet. Als je wisselgeld terugkrijgt, wordt het aantal n-2+mDaarbij stelt m het aantal munten wisselgeld voor. In plaats van n of m kun je elke andere letter gebruiken. De schrijfregels in de natuurkunde zijn:

- Getallen staan rechtop, zoals het getal 27 of 1273.
- Eenheden en hun voorvoegsels staan rechtop, zoals m, s of km.
- Namen van eenheden worden afgekort met een kleine letter zoals s voor seconde, behalve als ze zijn genoemd naar een persoon, zoals A voor ampère.
- Voluit geschreven eenheden beginnen altijd met een kleine letter.
- Tekens voor bewerkingen staan rechtop, zoals een + (plus).
- Symbolen voor grootheden staan *schuin gedrukt*. Dat heet *cursief*. Voorbeeld: I voor stroomsterkte. Symbolen kunnen hoofdletters, kleine letters, Griekse letters of zelfs Hebreeuwse letters zijn. Die laatste zullen we niet tegenkomen, Griekse letters weinig.
- Symbolen voor getallen staan net als die voor grootheden*cursief*. Voorbeelden: a, n, m, x. m is iets anders dan m. De cursieve m is een symbool voor een getal of grootheid; de rechtopstaande m staat voor de eenheid meter.

Let op: op het zendexamen houdt men zich niet aan deze internationale standaard!

2.7 Optellen en aftrekken

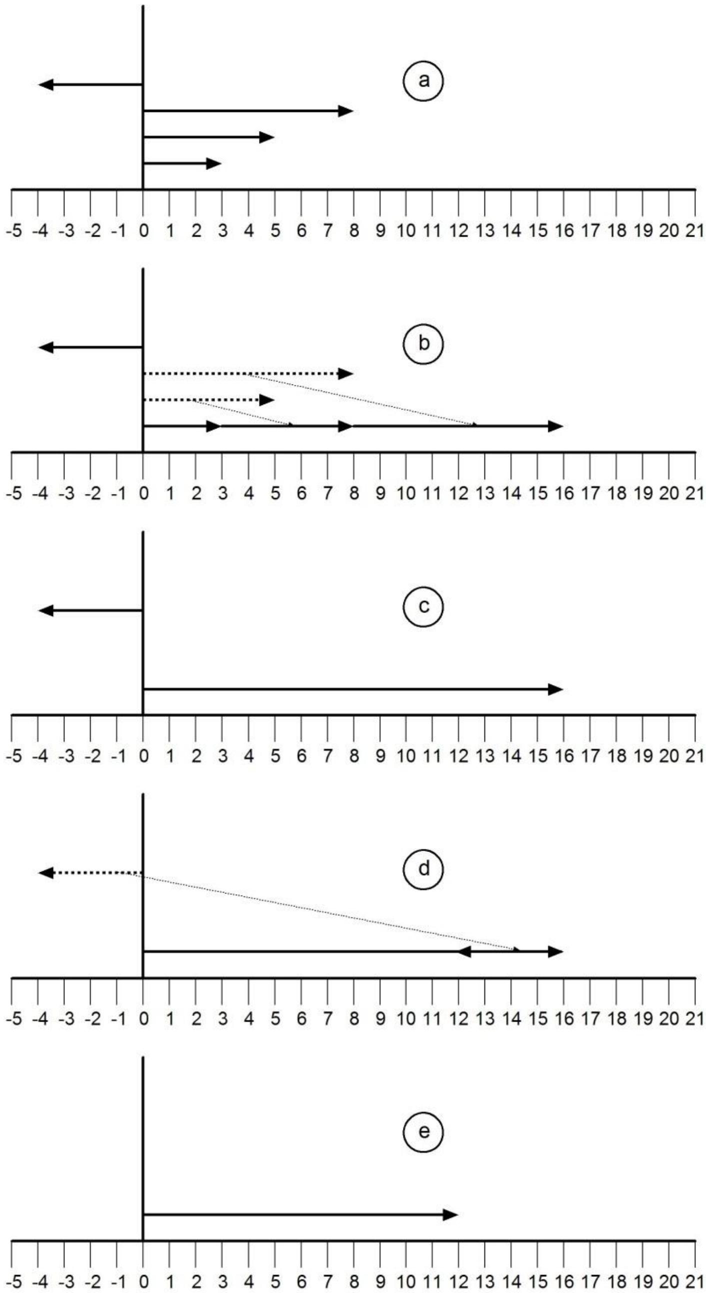
2.7.1 Plussen en minnen

Getallen kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken. In Figuur 2.7-1 maken we zulke bewerkingen zichtbaar.

Getallen zijn afgebeeld als stukjes rechte lijn met elk een pijlpunt. Ze zijn achtereenvolgens 3, 4, 5 en 8 eenheden lang. Omdat het lengten zijn, zijn het eigenlijk geen getallen, maar grootheden. Zuivere getallen kun je niet afbeelden.

De pijlpunt van het stukje lijn met lengte 4 wijst naar links, de andere drie naar rechts. Aan de liniaal onderin de plaatjes zien we links de negatieve getallen, dus die met een '-' (minteken) en rechts de positieve getallen. Dat is zo gebruikelijk, dat het bijna nooit andersom wordt gedaan.

De pijlen naar rechts geven een positief getal aan, de pijl naar links een negatief. We hebben dus te maken met de getallen +3, -4, +5 en +8. De '+' en de '-' noemen we het *teken*. De tekens '+' en '-' zijn elkaars *tegengestelde*. 15 is het tegengestelde van -15. Positieve getallen schrijven we meestal zonder '+', maar bijvoorbeeld '+21' is niet fout.



Figuur 2.7-1. De optelling 3+5+8-4.

In Figuur 2.7-1b tellen we op. Hier is dat het achter elkaar zetten van de naar rechts wijzende pijlen. De achterkant van een pijl komt telkens op de voorkant van een andere. In Figuur 2.7-1c zijn ze versmolten tot één pijl met een lengte van 16 eenheden, dus 3+5+8=16. In welke volgorde de pijlen achter elkaar worden geplaatst, doet er niet toe. Het resultaat is altijd een pijl van 16 eenheden lang.

Nu het negatieve getal. Aftrekken is hetzelfde als optellen met een negatief getal. De pijl van -4 komt dus met zijn achterkant op de pijlpunt van +16 (Figuur 2.7-1d). Hij wijst naar links en we houden zo een pijl van +12 eenheden lang over (Figuur 2.7-1e). Dus 3+5+8-4=12.

Het hele proces is ook weergegeven in een korte animatie.

Een optelling als 3+5+8-4 is eigenlijk niet meer dan een opsomming van getallen met hun teken. Daarbij doet de volgorde er niet toe, zolang je de zaak getal voor getal afwerkt. Doe je dat anders, dan kun je fouten krijgen. Schrijf de optelling maar eens in de volgorde 3+5-4+8. Als je eerst 4+8 uitrekent en dan pas het minteken toepast, dan krijg je 3+5-12 en daaruit komt -4 en geen 12! Je hebt dan 3+5-(4+8) uitgerekend in plaats van 3+5-4+8. De haakjes betekenen dat je eerst moet uitrekenen wat ertussen staat. Zonder haakjes (en binnen de haakjes) werk je het rijtje af van links naar rechts.

De uitkomst van een optelling heet de *som*. Als $a + b = c$, dan is c de *som* van a en b.

2.7.2 Tekens gecombineerd, haakjes

We hebben gezien dat een aftreksom hetzelfde is als een optelsom met een negatief getal. Een aftreksom met een negatief getal wordt een optelsom met een positief getal. - -3 is gelijk aan +3. Min min is plus. '--3' schrijf je bij voorkeur als '-(-3)'. Dat is duidelijker dan '- -3'. Wat tussen haakjes staat, komt eerst. Hier maakt het geen verschil, in andere gevallen soms wel.

2-(-3) is dus 2+3=5. –(+3) en +(-3) zijn hetzelfde als -3. Voor alle getallen en grootheden, noem ze voor de gelegenheid a, geldt $-(+a)=-a$ net als $+(-a)=-a$.

Min min (--) is dus samen plus, plus plus (++) ook. Min plus (-+) is min en plus min (+-) is ook min. Twee gelijke tekens samen is altijd een plus, twee tegengestelde maken een min.

2.7.3 Teken en richting

Het verband tussen richting en teken is in Figuur 2.7-1 met opzet gebruikt. In elektrische schakelingen is het normaal. Het gaat dan om stroom die die ergens in- of uitloopt. Erin noemen we meestal positief, eruit negatief. Andersom mag ook, als je het maar consequent doet. In hoofdstuk 3 werken we dat uit als de wetten van Kirchhoff aan de orde komen.

2.7.4 Som en verschil

Als $a - b = c$, dan is c het *verschil* van a en b. Als $b - a = d$, dan heet d ook het verschil van a en b. Het is daarom oppassen geblazen bij gebruik van het woord *verschil* in verband met getallen of grootheden. Het zegt niets over welk van de twee de grootste is.

2.7.5 Grootheden optellen

Een laatste punt is de vraag: Kun je ongelijksoortige grootheden bij elkaar optellen? Het antwoord is nee. We zeggen wel eens dat je geen appels en peren kunt vergelijken, maar ze optellen lukt ook niet. Vijf appels en vier peren blijven vijf appels en vier peren. Ampères optellen bij kilogrammen of meters bij seconden of graden Celsius gaat evenmin.

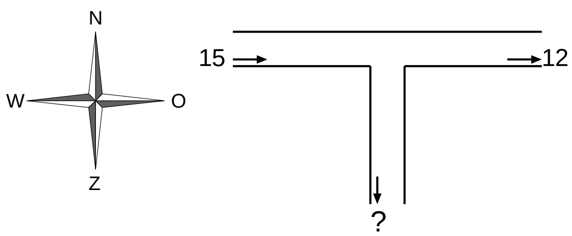
2.7.6 Samenvatting

- Een optelling is een opsomming van getallen of grootheden met hun teken
- Een aftreksom is een optelling met een negatief getal of negatieve grootheid.
- In een optelling zonder haakjes doet de volgorde van de getallen of grootheden er niet toe. Staan er wel haakjes in, zoals in a-(b+c), dan reken je eerst uit wat er tussen de haakjes staat.
- De uitkomst van een optelling heet de *som.*
- Min min (--) is plus, plus plus (++) ook. Min plus (-+)en plus min (+-) zijn allebei min. Twee gelijke tekens samen leveren dus altijd een plus, twee ongelijke een min.
- Je kunt alleen gelijksoortige grootheden bij elkaar optellen.

2.8 Opgaven

2.8.1 Opgave 2-6

Hieronder is een weg met T-kruising aangegeven. In 10 minuten tijd zijn er links van de kruising 15 voertuigen geteld die van west naar oost reden. Rechts van de kruising waren het er in diezelfde 10 minuten 12. Er waren geen voertuigen die van oost naar west reden en er is geen voertuig op de kruising blijven staan. Hoeveel voertuigen zijn in die 10 minuten rechtsaf geslagen?



Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

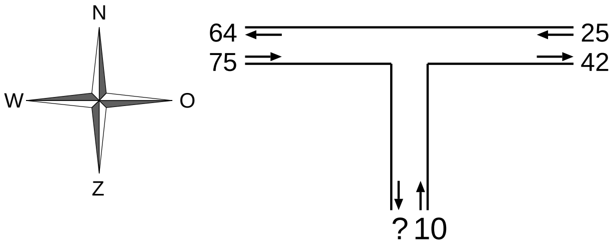
2.8.2 Opgave 2-7

Dezelfde berekening kun je ook doen met waterleidingbuizen, rivieren of stroomdraden. Lees de getallen in de figuur bij Opgave 2-6 bijvoorbeeld als liters per seconde. Hoeveel liter per seconde loopt er de leiding naar beneden in?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.8.3 Opgave 2-8

Het is niet erg waarschijnlijk dat op de west-oost route in Opgave 2-6 alle voertuigen dezelfde kant op rijden. Daarom doen we die opgave nog eens met tweerichtingsverkeer.



Aanwijzing: bereken per tak van de kruising eerst hoeveel verkeer er netto in of uit rijdt. Denk niet dat iets vergelijkbaars in elektrische schakelingen niet kan. Het kan, maar je meet per tak de netto stroom!

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

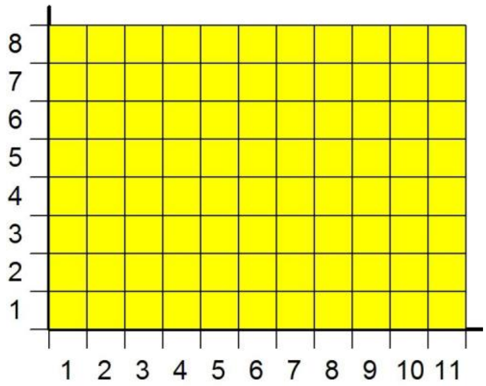
2.9 Vermenigvuldigen

2.9.1 Vermenigvuldigen van getallen

Je kunt een getal bij zichzelf optellen. Bijvoorbeeld 4 plus 4 is 8. Je kunt die bewerking ook 10 of bijvoorbeeld 29 keer doen. Eén keer ‘4’ en 28 keer ‘+4’ opschrijven neemt nogal wat ruimte op papier of beeldscherm. Het neemt ook tijd en je moet letterlijk op je tellen passen. Daarom schrijven we de optelling als vermenigvuldiging: ‘29x4’, uitgesproken als ’29 maal 4’ of ’29 keer 4’. Dat is overzichtelijker.

Wie zich de lessen vermenigvuldigen van de basisschool scherp herinnert of een zakrekenmachine bij de hand heeft, rekent snel uit dat de uitkomst 116 is. Als het alleen om getallen gaat, is een vermenigvuldiging dus niets anders dan het kort opschrijven van een lange optelling van steeds hetzelfde getal. In Figuur 2.7-1 telden we lengten op. Aan het eind hadden we nog steeds een lengte als uitkomst. Die was afgebeeld als een pijl.

2.9.2 Vermenigvuldigen van gelijksoortige grootheden



Figuur 2.9-1. Vermenigvuldiging van 8 en 11 lengte-eenheden.

Het vermenigvuldigen van grootheden gaat anders dan van getallen. Dat komt doordat een grootheid zelf een vermenigvuldiging is van een getal en een eenheid. Voorbeeld: 7 m betekent 7 maal de eenheid meter. Bij het vermenigvuldigen van grootheden vermenigvuldigen we niet alleen de getallen, maar ook de eenheden. Voorbeeld: 8 m maal 11 m. Dat zien we afgebeeld in Figuur 2.9-1. We zien 8 rijen van 11 vierkantjes (8x11), maar ook 11 kolommen van 8 vierkantjes (11x8). Beide hebben evenveel vierkantjes als uitkomst. In een vermenigvuldiging doet de volgorde er dus niet toe, net als bij optellen. In een animatie is dit zichtbaar gemaakt voor 8 en 12 eenheden.

Laten we ervan uitgaan dat in Figuur 2.9-1 de lengte-eenheid de meter is. We hadden (8 m) x (11 m). De 8 en de 11 mogen we dus van plaats laten veranderen. Met de meters mag dat ook. De vierkantjes worden er niet anders van. Meters zijn meters. Dus mogen we ook (8 x 11) x (m x m) schrijven. Een lengte maal een lengte is een oppervlakte. De oppervlakte van elk vierkantje stelt één vierkante meter voor, die van de rechthoek is dus 88 vierkante meter. Meestal schrijven we die vierkante meter niet voluit, maar als m^2. Vermenigvuldigen van eenheden leidt tot een nieuwe eenheid. In dit geval worden twee lengte-eenheden na vermenigvuldiging een oppervlakte-eenheid. Zoals het vermenigvuldigen van twee eenheden leidt tot een nieuwe eenheid, leidt vermenigvuldigen van twee grootheden tot een nieuwe grootheid. In ons voorbeeld hebben we gelijksoortige grootheden gebruikt, dus met dezelfde eenheid. Voordat we ons met ongelijksoortige grootheden gaan bezighouden, is het goed, iets te zeggen over het vermenigvuldigteken.

2.9.3 Vermenigvuldigtekens

We hebben tot nu toe het vermenigvuldigteken geschreven als 'x'. Dat is vanouds gebruikelijk. Met de komst van de computer is dat veranderd. Als we een machine onderscheid moeten laten maken tussen de letter 'x' en de opdracht 'x' om een vermenigvuldiging uit te voeren, geeft dat problemen. In programmeertalen is daarom het teken * gebruikelijk geworden. Later is het ook in gedrukte tekst opgedoken. Dus bijvoorbeeld $11 \ast 8$, om bij Figuur 2.9-1 te blijven.

In de wiskunde en de natuurkunde speelt het symbool x een andere rol dan die van vermenigvuldigteken x. Daarom wordt dit laatste in die wereld praktisch nooit gebruikt. Hoe verwarrend het gebruik van het 'x'-teken is, wordt duidelijk als je de uitdrukking axb bekijkt. De x staat rechtop en zal dus als vermenigvuldigteken zijn bedoeld. De symbolen *a* en *b* staan schuin (cursief) gedrukt en vertegenwoordigen dus een getal of grootheid. Maar zie je in één oogopslag het verschil met *axb*? Nee dus. Daarin is de *x* cursief gedrukt en dan is het een grootheid of variabele, net als *a* en *b*. Verwarrend.

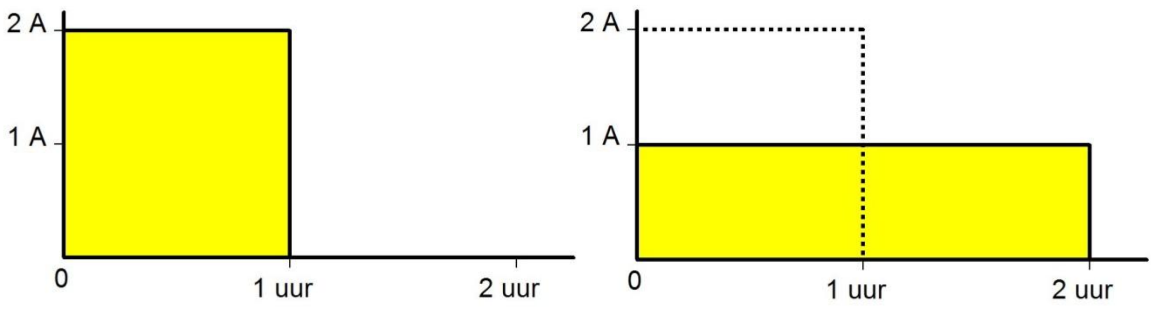
Tussen eenheden die met elkaar worden vermenigvuldigd, schrijven we soms een punt en meestal helemaal niets. Voorbeeld: de eenheid van elektrische lading, de Coulomb, is hetzelfde als de ampèreseconde. Dat is ampère maal seconde, soms geschreven als A.s en vaker als As. Bij symbolen voor een getal of grootheid schrijven we haast nooit een vermenigvuldigteken. Met 2*a* bedoelen we 2 maal *a*. 2.*a* gebruiken we haast nooit. Met *ab* bedoelen we *a* maal *b*. Zelfs *a.b* kom je weinig tegen. Het vermenigvuldigteken ‘x’ zullen we in deze cursus dan ook in combinatie met symbolen niet meer gebruiken.

De uitkomst van een vermenigvuldiging heet het *product*. Het product van *a* en *b* is *ab*.

2.9.4 Vermenigvuldigen van ongelijksoortige grootheden

Iedere vermenigvuldiging van twee grootheden kun je afbeelden op de manier van Figuur 2.9-1. Je zet dan de ene grootheid verticaal en de andere horizontaal uit. In Figuur 2.9-1 hadden we twee gelijksoortige grootheden (lengte), maar het kan ook met ongelijksoortige. Ook als een grootheid in werkelijkheid geen lengte is, kunnen we hem in een figuur of illustratie als lengte weergeven.

Laten we bijvoorbeeld eens naar de ontlading van een accu kijken (Figuur 2.9-2). De capaciteit ervan wordt meestal opgegeven in Ah, symbool voor ampèreuur. Oplettende lezers zullen nu aan de As uit sub-paragraaf 2.9.3 denken. Ook stroomsterkte maal tijd! Omdat er 3600 seconden in een uur gaan, is 1 Ah gelijk aan 3600 As. Eén As heet ook wel coulomb, symbool C. 1 Ah is hetzelfde als 3600 coulomb = 3,6 kC. Zo reken je gelijksoortige eenheden in elkaar om. Een accucapaciteit opgeven in C is ongebruikelijk, maar natuurkundig gezien is er niets mis mee.



Figuur 2.9-2. Ontlading van een ideale accu van 2Ah met 2 A (links) en met 1 A (rechts). Beide gele oppervlakten hebben een ongelijke hoogte, maar zijn even groot.

Een volledig opgeladen accu van 2 Ah kan in theorie 1 uur lang een stroom van 2A leveren. Daarna is de inhoud op. Dat is weergegeven in de linkerhelft van Figuur 2.9-2. De oppervlakte van de gele rechthoek vertegenwoordigt de lading van de accu. De breedte vertegenwoordigt de tijd (één uur) en de hoogte de stroom (twee ampère). De oppervlakte stelt 2 Ah voor.

Als we de accu niet met 2, maar met 1 A ontladen, dan wordt de rechthoek half zo hoog. Om de oppervlakte van 2 Ah gelijk te houden, moet hij twee keer zo breed worden. Dat zien we in de rechterhelft van Figuur 2.9-2. De eerste rechthoek staat er gestippeld in. De accu levert bij een ontlaadstroom van 1 ampère twee uur stroom. In werkelijkheid is dat verband niet helemaal haarscherp. Dat komt doordat in werkelijkheid de capaciteit van een accu met toenemende ontlaadstroom iets afneemt.

2.9.5 Het teken van een product

We hebben het bij vermenigvuldigen nog niet gehad over het *teken* van het product, plus of min. Min maal min is plus, dus (-2).(-2)=4, net als 2.2. En 2.(-2)=-4, net als (-2).2. Eén min geeft een negatief product, twee minnen een positief, drie minnen weer een negatief product, enzovoort. Algemeen gezegd: de uitkomst van een vermenigvuldiging is negatief als er een oneven aantal negatieve getallen of grootheden in staat. Als één van de waarden in de vermenigvuldiging 0 is, is de uitkomst altijd 0. $0 * 2 = 0$, $100 * 0 = 0$, enzovoort.

2.9.6 Samenvatting:

- Bij een vermenigvuldiging mag elke volgorde van de te vermenigvuldigen getallen, eenheden of grootheden worden aangehouden. De uitkomst blijft dezelfde.
- Gelijksoortige en ongelijksoortige grootheden kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd. Het resultaat is in alle gevallen een nieuwe grootheid. De nieuwe grootheid wordt soms uitgedrukt in de oorspronkelijke eenheden en soms in een nieuwe eenheid. $10\ \mathrm{A} * 5\ \mathrm{h}$ wordt dus 50 Ah. Ah kun je ook in de SI-eenheid Coulomb schrijven. Dan moet het getal met 3600 worden vermenigvuldigd. Natuurkundig is daar niets mis mee, maar gebruikelijk is het niet.
- De uitkomst van een vermenigvuldiging heet het *product*.
- Als in een vermenigvuldiging een getal 0 voorkomt, is het product ook 0.
- Een product is negatief als er een oneven aantal negatieve getallen of grootheden in de vermenigvuldiging staat, anders is het positief.

2.10 Opgaven

2.10.1 Opgave 2-9

Een veld is 1 km lang en 300 m breed. Hoeveel m^2 (vierkante meter) is dat?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.2 Opgave 2-10

Door een draad loopt een stroom van 1A. Dat is elke seconde 1 C. Hoeveel C is er in een minuut doorheen gelopen?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.3 Opgave 2-11

Een volgeladen accu blijkt 10 uur lang een stroom van 0,5 A te kunnen leveren. Hoe groot is de capaciteit van de accu?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.4 Opgave 2-12

Hoeveel is 0.37,25? En 2.(-3)? En (-2).(-3)?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.11 Delen en omgekeerde waarden

2.11.1 Delen en deeltekens

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen, zoals aftrekken het omgekeerde is van optellen. Als vermenigvuldigen van een getal a met een getal b een getal c oplevert, dan levert delen van c door b weer het getal a op. Een cijfervoorbeeld: $7 * 3 = 21$ en $21 : 3 = 7$. Omdat bij een vermenigvuldiging de volgorde van vermenigvuldigen er niet toe doet, geldt ook $21 : 7 = 3$, want $3 * 7 = 7 * 3 = 21$.

Het deelteken is hier geschreven als ':'. Andere deeltekens zijn:

- Een schuine streep, 21/3
- Een horizontale streep, $\frac{21}{3}$.
- '÷', dus $21 \div 3$. Deze komt weinig voor.

In de natuurkunde en de wiskunde zijn de schuine en vooral de horizontale streep het gebruikelijkst.

2.11.2 De deling als vermenigvuldiging

Net als tussen optellen en aftrekken is het verschil tussen vermenigvuldigen en delen maar betrekkelijk. Je kunt een deling veranderen in een vermenigvuldiging door te vermenigvuldigen met het omgekeerde van het getal of de grootheid waardoor je wilt delen. Wat is dat omgekeerde? Geen minteken deze keer. Het omgekeerde van een getal of grootheid a is $1/a$. Het omgekeerde van $1/a$ is weer a. We gebruiken hier een letter, omdat je daarvoor alle getallen mag invullen. Een voorbeeld met getallen:

$$\frac{21}{3} = 21.\frac{1}{3} \qquad (2.11\text{-}1)$$

Hiermee zijn we bij de breuken terechtgekomen, want $\frac{1}{3}$ is geen geheel getal. Voor we daarmee aan de slag gaan, kijken we nog naar het op elkaar delen van grootheden. Eigenlijk doen de meesten van ons dat regelmatig, maar we zijn het ons niet altijd bewust. Snelheid bijvoorbeeld is lengte (afstand) gedeeld door tijd. De maximumsnelheid in de bebouwde kom is meestal 30 of 50 km per uur. Dat 'per' geeft een deling aan. We schrijven 'km per uur' meestal als km/h. Daar zit de deelstreep al in. Wie 100 km aflegt in 4 uur (4 h), heeft een gemiddelde snelheid van 100 km/(4 h) = 25 km/h gehad, want $4 * 25 = 100$.

2.11.3 De volgorde in een deling

Bij een deling is de volgorde nu eens wel van belang: 100/4 is het omgekeerde van 4/100. De uitkomst van een deling heet het *quotiënt* (spreek uit: 'koosjent'). Net als bij de term *verschil* kan het *quotiënt* van twee getallen of grootheden twee waarden opleveren. Dat hangt af van hun volgorde in de deling. Zonder verdere informatie is *quotiënt* dus net als *verschil* een onduidelijke term.

2.11.4 Het teken van een quotiënt

De uitkomst van een deling is positief als beide getallen of grootheden positief of beide negatief zijn. Als één van beide negatief is, is de uitkomst ook negatief. Wordt 0 gedeeld door een getal dat niet 0 is, dan is de uitkomst ook 0. Wordt een getal dat niet 0 is, gedeeld door 0, dan is de uitkomst oneindig. Wordt 0 gedeeld door 0, dan is de uitkomst onbepaald. 0/0 is dus betekenisloos.

2.11.5 Samenvatting:

- Delen is de omgekeerde bewerking van vermenigvuldigen.
- Bij een deling mag je niet zomaar de volgorde veranderen.
- Ongelijksoortige grootheden kunnen op elkaar worden gedeeld. Net als bij vermenigvuldigen is het resultaat een nieuwe grootheid.
- De uitkomst van een deling heet *quotiënt*. "Het quotiënt van *a* en *b*" kan zowel $\frac{a}{b}$ als $\frac{b}{a}$ betekenen. Het is met het gebruik van dit woord dus oppassen geblazen.
- De uitkomst van een deling is positief als beide getallen of grootheden hetzelfde teken hebben. Bij verschillend teken is de uitkomst negatief. Is het getal dat gedeeld wordt 0, dan is de uitkomst ook 0. Is het getal waardoor gedeeld wordt 0, dan is de uitkomst oneindig. Zijn ze beide 0, dan is de uitkomst onbepaald.

2.12 Opgaven

2.12.1 Opgave 2-13

Op een amateurbeurs worden zakjes met geheimzinnige onderdelen aangeboden voor 2 euro per zakje. De verkoper begon met een lege kas. Aan het eind van de beurs heeft hij 157 euro in kas. Uit de kas heeft hij in totaal 5 euro uitgegeven aan koffie en soft-ice. Hoeveel zakjes onderdelen heeft hij verkocht?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.2 Opgave 2-14

Hoeveel is: 0/2, 2/0, 15/3, (-15)/3, 15/(-3) en (-15)/(-3)?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.3 Opgave 2-15

Een accu van 15 Ah wordt gebruikt om een lamp te voeden die 1A gebruikt. Hoe lang hoort de accu het vol te houden als die bij het begin volledig is opgeladen? En als de lamp 3A gebruikt? Ga uit van een accu waarbij de capaciteit niet afhangt van de geleverde stroomsterkte (dat is in werkelijkheid niet helemaal zo).

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.4 Opgave 2-16

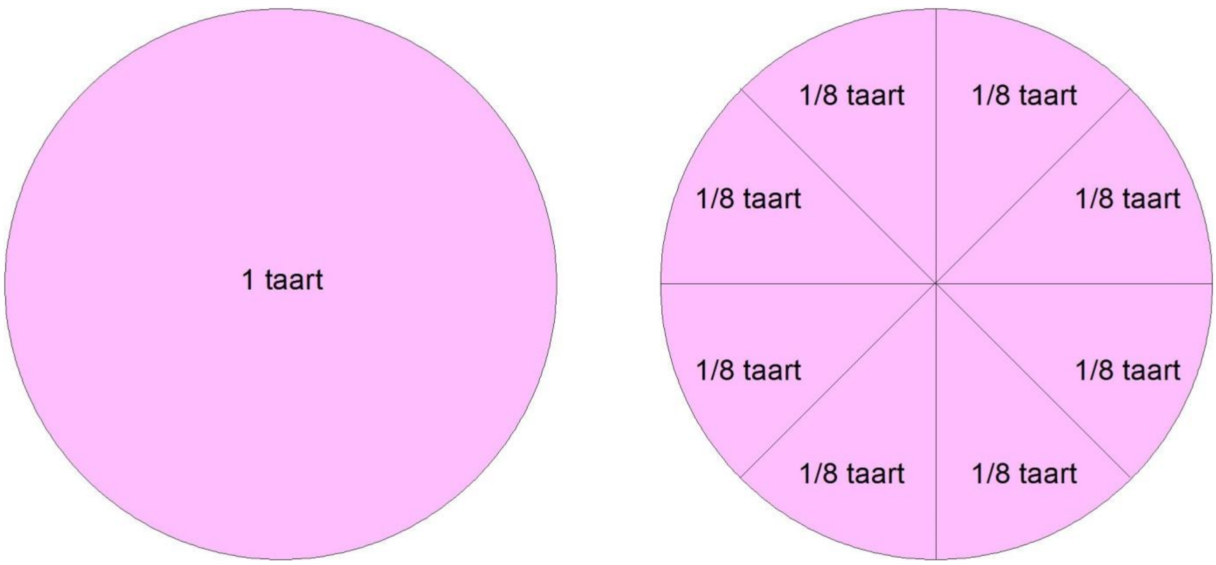
Is er verschil in uitkomst tussen $a.(b/c).d$ en $(a.b).d/c$? En tussen $a.(b/c).d$ en $a/c.b.d$?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.13 Breuken

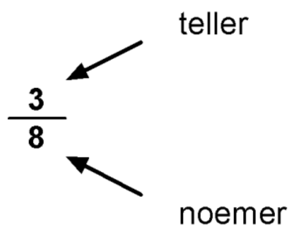
2.13.1 Wat is een breuk?

We gaan nog wat dieper in op breuken. Als je een taart in 8 even grote punten snijdt, is 1 taartpunt 1/8 (spreek uit: één achtste) deel van de taart (Figuur 2.13-1).



Figuur 2.13-1. Taart in bovenaanzicht. 1 taart = $\frac{8}{8}$ *taart.*

Twee punten is ${}^{2}/_{8}$ taart, 3 punten ${}^{3}/_{8}$, enzovoort. Een breuk ziet er dus uit als een deling. Dat is het ook. Als we 3 taarten verdelen onder 8 taarteters, heeft elk 3 punten is $\frac{3}{8}$ taart gekregen (en na het opeten misschien een onprettig gevoel in de maagstreek). We delen zo 3 door 8.



Figuur 2.13-2. Teller en noemer

Een breuk bestaat uit een waarde boven en onder de deelstreep. De waarde erboven heet de *teller*. Die telt het aantal delen. De waarde onder de deelstreep heet de *noemer* (Figuur 2.13-2). De noemer be*noemt* de soort van de delen.

Bij drie taarten, gelijk te verdelen onder 8 eters, geeft de teller het aantal taarten (3), de noemer het aantal eters (8).

2.13.2 Vereenvoudigen van breuken

Een breuk verandert niet van waarde als we teller en noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigen. Een voorbeeld: door de teller te vermenigvuldigen met 2 vermenigvuldigen we de oorspronkelijke uitkomst met 2. Door daarna de noemer met 2 te vermenigvuldigen, delen we de uitkomst weer door 2. Resultaat: geen verandering. Teller en noemer door hetzelfde getal delen mag natuurlijk ook zonder dat de waarde van de breuk verandert.

$$\frac{3}{8} \text{ is gelijk aan } \frac{3.2}{8.2} = \frac{6}{16} \qquad (2.13\text{-}1)$$

En

$$\frac{8}{8} = \frac{{}^{8}/_{8}}{{}^{8}/_{8}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (2.13\text{-}2)$$

Deze truc is handig bij ingewikkelde breuken met vermenigvuldigingen of delingen in teller en/of noemer. Neem bijvoorbeeld

$$\frac{25.18.49}{35.15} \qquad (2.13\text{-}3)$$

In teller en noemer van (2.13-3) zien we getallen die eindigen op 5. Elk getal dat eindigt op een 5 kun je door 5 delen zonder een rest over te houden. $\frac{35}{5} = 7$ en $\frac{25}{5} = 5$. We delen daarom teller en noemer door 5. We krijgen op die manier

$$\frac{25.18.49}{35.15} = \frac{5.18.49}{7.15} \qquad (2.13\text{-}4)$$

We kunnen nog een keer delen door 5, want in de teller staat 5 en in de noemer 15, dat is 3.5. Dat levert

$$\frac{5.18.49}{7.15} = \frac{1.18.49}{7.3} \qquad (2.13\text{-}5)$$

De 7 in de noemer en de 49 in de teller van de uitkomst in (2.13-5) zijn deelbaar door 7 (uitkomsten respectievelijk 1 en 7). De 3 in de noemer en de 18 in de teller zijn deelbaar door 3 (uitkomsten 1 en 6). Dan houden we over

$$\frac{1.18.49}{7.3} = \frac{6.7}{1.1} = \frac{42}{1} = 42 \qquad (2.13\text{-}6)$$

Wat we in (2.13-3) tot en met (2.13-6) hebben gedaan, heet het *vereenvoudigen* van een breuk. Zo mooi als deze komt natuurlijk niet elke ingewikkelde breuk uit. De gebruikte truc staat ook bekend als 'tegen elkaar wegstrepen'. Als de teller, zoals hier, kan worden gedeeld door de noemer, is de uitkomst een geheel getal. Anders is het een *gebroken getal*.

2.13.3 Optellen van breuken

Optellen (en aftrekken, maar dat is hetzelfde, weten we sinds sub-paragraaf 2.7.1) van breuken is een lastig klusje als ze niet dezelfde noemer hebben. We kennen de uitdrukking *alles onder één noemer brengen*. Die handeling is nodig vóórdat breuken met verschillende noemer kunnen worden opgeteld. Een voorbeeld is de optelling

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \qquad (2.13\text{-}7)$$

We berekenen eerst het product van 2 en 3 om een getal te krijgen dat deelbaar is door zowel 2 als 3. $2.3 = 6$. We moeten nu zorgen dat er in de noemer van beide getallen 6 komt te staan. Dat gaat zo:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1.2}{3.2} + \frac{1.3}{2.3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \qquad (2.13\text{-}8)$$

2.13.4 Vermenigvuldigen van breuken

Vermenigvuldigen van breuken is gemakkelijker. Je vermenigvuldigt zowel de tellers als de noemers met elkaar. Klaar is Kees! Voorbeeld:

$$\frac{1}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1.1}{3.2} = \frac{1}{6} \qquad (2.13\text{-}9)$$

Of met een ingebouwde vereenvoudiging (let op de 3 in teller en noemer):

$$\frac{2}{3} . \frac{3}{5} = \frac{2.3}{3.5} = \frac{2}{5} \qquad (2.13\text{-}10)$$

In (2.13-10) kunnen we de 3 in de teller en de 3 in de noemer tegen elkaar wegstrepen.

Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde, zoals we eerder zagen. Een voorbeeld:

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.\frac{2}{1}=\frac{2}{3} \qquad (2.13\text{-}11)$$

In woorden: delen door een half is vermenigvuldigen met twee. Het werken met breuken kan omslachtig zijn. Daarvoor heeft de mens een oplossing gevonden. Dat is de tiendelige breuk die ook wel *decimale breuk* heet. Het woord *decimaal* is afgeleid van het Latijnse woord voor tien, *decem*. Voordat we daarmee aan de slag gaan, eerst weer een samenvatting en een paar opgaven.

2.13.5 Samenvatting:

- Een breuk is een deling waarin de teller wordt gedeeld door de noemer.
- De uitkomst van een breuk is een gebroken getal, behalve als de teller deelbaar is door de noemer; dan is het een geheel getal.
- Optellen van breuken kan pas als je ze eerst *onder één noemer brengt*.
- Vermenigvuldigen van breuken doe je door teller met teller en noemer met noemer te vermenigvuldigen.
- Een getal delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde van die breuk.

2.14 Opgaven

2.14.1 Opgave 2-17

Bereken:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}$$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.14.2 Opgave 2-18

Bereken:

$$5 : \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{14}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{26}{15}$$

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{3}$$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.15 Tiendelige of decimale breuken

2.15.1 Opbouw van getallen

We kennen de opbouw van gehele getallen in het tientallige stelsel. Van rechts naar links (en dus niet van links naar rechts!) staan eerst de ééntallen (0-9), dan de tientallen, dan de honderdtallen, de duizendtallen, enz. Het getal 1307 is dus de som van 7 keer 1, 0 keer 10, 3 keer 100 en 1 keer 1000. Een geschreven getal van meer dan 1 cijfer is dus eigenlijk een optelling.

2.15.2 Consequent doorredeneren

Als we nu van links naar rechts kijken, worden de treden steeds 10x zo klein. Moeten we stoppen bij stappen van 1? Als we binnen de gehele getallen willen blijven, wel. Voor gebroken getallen gaan we gewoon door. Daar is rekenkundig gezien geen enkel bezwaar tegen. We redeneren dus van links naar rechts verder en gaan door met stapjes van

$$1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \tag{2.15-1}$$

gevolgd door stapjes van

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \tag{2.15-2}$$

gevolgd door stapjes van

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \tag{2.15-3}$$

en zo verder. Tienden, honderdsten en duizendsten dus. Zo kunnen we in theorie oneindig lang doorgaan. Met een oneindig lange reeks kun je ieder niet-geheel getal weergeven. In de praktijk is dat niet te doen en behelpen we ons daarom met een benadering die bestaat uit een eindig aantal cijferposities.

2.15.3 De komma

Er zit één lastig puntje in dit verhaal. Bij een geheel getal geeft het meest rechtse cijfer altijd het aantal stapjes van 1 aan. Daarmee weten we van alle cijfers in het getal waarvoor ze staan. Als we naar believen kleinere stapjes van $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ en verder mogen toevoegen, is die zekerheid weg. Er is dan een baken nodig zodat we kunnen zien wat waar staat. Dat baken is de komma. Op je rekenmachine is het misschien de decimale punt, want die wordt vooral in veel Engelstalige landen gebruikt in plaats van onze komma. In Europa is de komma de norm. Die komt tussen de stappen van 1 en die van $\frac{1}{10}$. Het getal 2,1 is dus 2 plus $\frac{1}{10}$.

Vóór de komma, dus aan de linkerkant, staat het deel dat hele stappen voorstelt en erachter, aan de rechterkant, het gebroken deel. Het geheel heet een *tiendelige* of *decimale breuk*. De prijs van een artikel in een winkel is bijvoorbeeld € 15,48. Met Euro's gaan we tot twee cijfers achter de komma.

In de natuurkunde en de wiskunde kunnen er (veel) meer cijfers achter de komma staan. Deel 1 door 3 op je zakrekenmachine en je krijgt een getal 0,333333333 als je display 10 cijfers aankan. In werkelijkheid hoort achter de komma een oneindig aantal keren het cijfer 3. Die kun je in de werkelijke wereld met een tiendelige breuk niet exact weergeven. Dat geldt voor verreweg de meeste tiendelige breuken. Maar deel 1 door 4 en je vindt 0,25. Met sommige breuken gaat het dus wel.

2.15.4 Meetnauwkeurigheid en afronden

In de praktische natuurkunde heeft het zelden zin om voor een getal heel veel cijfers te gebruiken. Meestal is een benadering voldoende. Stel bijvoorbeeld dat je een elektrische spanning in volts meet. Je afleesnauwkeurigheid is vaak niet beter dan drie cijfers. Laten we zeggen dat je 3,78 V op je meter afleest. Dan het zinloos om de uitkomst van een berekening, waarin dat meetresultaat verwerkt zit, in 10 cijfers op te schrijven. Daarop zijn twee uitzonderingen:

- Als het om nullen gaat rechts van de komma tot het eerste cijfer dat niet nul is, bijvoorbeeld 0,000756.
- Als het om nullen gaat tussen het meest rechtse cijfer links van de komma dat niet nul is en de komma, bijvoorbeeld 756 000.

Als het om een grootheid gaat, hebben we de voorvoegsels voor eenheden in Tabel 2.4-2 bij de hand om die nullen allemaal of voor het grootste deel weg te werken.

Drie voorbeelden:

- De berekeningsuitkomst voor een schakeling met de eerdergenoemde 3,78 V is 7,38654 ampère. Dat is een schijnnauwkeurigheid, want zo nauwkeurig was onze voltmeting niet. Er waren maar drie cijfers. We ronden de uitkomst van de berekening daarom ook af op een waarde met 3 cijfers. Dat wordt 7,39 A, het getal van 3 cijfers dat het dichtst bij de berekende uitkomst ligt. Dat zul je meestal zelf moeten doen, want zakrekenmachines zijn daarvoor bijna altijd te dom.

- De berekeningsuitkomst is 0,00738654 Ampère. Moeten we nu afronden op 0,007 A? Het antwoord is nee, want de eerste nullen geven alleen maar aan dat het hier om duizendsten gaat. Het resultaat wordt dus 0,00739 Ampère, maar met Tabel 2.4-2 in gedachten liever 7,39 mA.
- De berekeningsuitkomst is 7386,64 A. Ook dat probleem is op te lossen met nullen. In dit geval maar één: 7390 Ampère, of 7,39 kA. Dat is voor een elektronische schakeling heel veel. Bij zo'n uitkomst zou je ook je berekening even moeten controleren.

Nog één afrondingsregeltje: stel dat de uitkomst 7,39654 is. Dat rond je af op 7,40. In dit geval laat je de 0 achter de 4 staan, omdat je daarmee de nauwkeurigheid van het resultaat aangeeft. Dus niet 7,4! We noemen de afronding op 7,40 ook wel *afronding op drie significante cijfers*, of in behoorlijk Nederlands: op *drie betekenisvolle cijfers*. Daar moet je geen twee van maken. Rekenkundig geldt natuurlijk 7,40 = 7,4. Maar als het om (on)nauwkeurigheid gaat, geven beide uitkomsten niet precies hetzelfde aan. 7,4 suggereert dat het getal op twee betekenisvolle cijfers nauwkeurig is bepaald, 7,40 op drie.

2.15.5 Samenvatting

- Een tiendelige of decimale breuk is een gebroken getal. We kunnen elk gebroken getal schrijven als tiendelige breuk.
- Een tiendelige breuk zit net zo in elkaar als een geheel getal. Van rechts naar links de eenheden, tientallen, honderdtallen, enz. Rechts daarvan tienden, honderdsten, duizendsten, enzovoort. De komma is de scheiding tussen eenheden en tienden.
- Een tiendelige breuk is meestal een oneindig lange reeks cijfers, maar soms geeft een eindig aantal cijfers een exacte waarde.
- Een tiendelige breuk wordt in de praktijk uitgeschreven in het aantal betekenisvolle of significante cijfers. Bij metingen gebeurt dat standaard. Meer cijfers gebruiken is dan niet alleen zinloos, het suggereert ook een nauwkeurigheid die er niet is.

2.16 Opgaven

2.16.1 Opgave 2-19

Schrijf als decimale breuk met hoogstens 6 cijfers achter de komma): 17 397/10,

17 397/100, 17 397/1000, 25/1000, 50/4, 25/11, 25/3, 25/7.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.16.2 Opgave 2-20

Een meetuitkomst is 4,23 eenheden. Er wordt een berekening mee gedaan op een zakrekenmachine die de uitkomst 6,761347890 geeft. Welke cijfers zijn hier betekenisloos en waarop rond je de uitkomst op een zinvolle manier af?
Doe hetzelfde voor een uitkomst 6,76561399; voor een uitkomst 6,76497865 en voor een uitkomst 7,79718223.

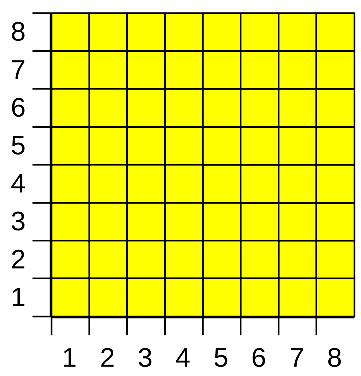
Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.17 Kwadraten, machten en exponenten

2.17.1 Kwadraten

In 2.9.1 hebben we gezien dat je een vermenigvuldiging van getallen kunt voorstellen als het bij zichzelf optellen van een getal. Dat kan een onbeperkt aantal keren. We kunnen dat kunstje herhalen met vermenigvuldigen.

Een getal maal zichzelf heet een *kwadraat*. Kwadraat betekent letterlijk ‘vierkant’. Een vierkant is een rechthoek waarvan alle zijden dezelfde lengte hebben. Voor het berekenen van de oppervlakte van een vierkant maakt het niet uit of je lengte en hoogte met elkaar vermenigvuldigt of dat je lengte.lengte of hoogte.hoogte neemt. Zie Figuur 2.17-1. Daarin staat een vierkant van 8 lengte-eenheden hoog en 8 lengte-eenheden breed. Laten we er voor het gemak van uitgaan dat het om meters gaat. De figuur is dus verkleind weergegeven. De oppervlakte is dan 8m.8m. Dat is hetzelfde als 8.8.m.m.



Figuur 2.17-1. Vierkant met zijden van 8 eenheden.

8.8 schrijven we ook als 8^2. Uitgesproken als ‘acht kwadraat’, maar ook ‘acht tot de macht twee’, ‘acht tot de tweede macht”, of korter: ‘acht tot de tweede’. Zo wordt m.m natuurlijk m^2. Dit verklaart de kleine 2 rechtsboven de m, het symbool voor de eenheid m (meter). “m^2” is de standaard-schrijfwijze van de SI-oppervlakte-eenheid *vierkante meter*. ‘*Meter kwadraat’* zeggen we niet vaak, maar er is niets mis mee. In Figuur 2.17-1 staat 64 m^2 verkleind afgebeeld als 64 vierkantjes die 1 m^2 voorstellen. In 2.9.2 en 2.9.4 hebben we gezien dat vermenigvuldigen van eenheden een nieuwe eenheid oplevert. In dit geval levert een lengte-eenheid, met zichzelf vermenigvuldigd, een oppervlakte-eenheid. Dat zagen we al in 2.9.2.

Is nu de linkerhelft van Figuur 2.9-2, waarin de accu van 2 Ah in 2 uur werd ontladen een vierkant in de natuurkundige betekenis? Het antwoord is nee. Op de ene zijde staan namelijk ampères, op de andere uren. De ampèreuur (Ah) is een vermenigvuldiging van twee verschillende eenheden en dus geen kwadraat. Vierkante meters zijn dat wel.

2.17.2 Exponenten: van vermenigvuldiging naar optelling

Het woord 'macht' is bij de kwadraten al gevallen. Als a^2 hetzelfde is als $a.a$, is er alle reden om $a.a.a$ te schrijven als a^3, $a.a.a.a$ als a^4, enzovoort. In Tabel 2.4-2 hebben we al kennis gemaakt met de exponent. Hier komt hij terug als het kleine getalletje rechts boven de a.

De exponent geeft aan hoe vaak een getal met zichzelf wordt vermenigvuldigd. Bij a^4 spreken we over 'a tot de macht vier', 'a tot de vierde macht' of kortweg 'a tot de vierde'. Bekijk nu eens de vermenigvuldiging van a^2 en a^3, dus twee verschillende machten van a.

$$a^2.a^3 = (a.a).(a.a.a) = a^5 \qquad (2.17\text{-}1)$$

De haakjes zijn hier gebruikt om de beide onderdelen van de vermenigvuldiging duidelijk te laten uitkomen. Omdat de volgorde in een vermenigvuldiging niets uitmaakt, hebben de haakjes geen invloed op de uitkomst. We zien dat we de exponenten bij elkaar kunnen optellen. Vermenigvuldigen van machten van eenzelfde getal betekent dus niet meer dan exponenten optellen.

2.17.3 Negatieve exponenten

De vermenigvuldiging

$$a.a^4 \qquad (2.17\text{-}2)$$

levert

$$a.a.a.a.a = a^5 \qquad (2.17\text{-}3)$$

Dan is a dus hetzelfde als a^1, want 1+4=5.

Als we a^5 weer delen door a, dan moeten we a^4 als uitkomst krijgen. Delen door a is vermenigvuldigen met $\frac{1}{a}$. Dan krijgen we

$$a^5.\frac{1}{a} = a^4 \qquad (2.17\text{-}4)$$

De exponent die de waarde 5 had, wordt door deze bewerking 4. Er gaat dus 1 vanaf of anders gezegd, er komt -1 bij. We mogen dus voor $\frac{1}{a}$ ook a^{-1} schrijven:

$$a^5.\frac{1}{a} = a^4 = a^5.a^{-1} \qquad (2.17\text{-}5)$$

De omgekeerde waarde van a^2 is

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2} \qquad (2.17\text{-}6)$$

We laten dit in getalvorm zien met het getal 3 en de exponenten 4 en -1.

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81 \qquad (2.17\text{-}7)$$

En

$$\frac{81}{3} = 27 \qquad (2.17\text{-}8)$$

En dan

$$\frac{81}{3} = 3^4.3^{-1} = 3^3 = 3.3.3 = 27 \qquad (2.17\text{-}9)$$

Twee keer dezelfde uitkomst (zoals het hoort). Probeer het als je wilt ook met het getal 2.

De term *exponent* kenden we al van Tabel 2.4-2. De waarde van een exponent stopt niet bij 2. Hoewel de exameneisen voor N niet verder gaan dan kwadraten, behandelen we desondanks grotere exponenten dan 2. We blijven daarbij binnen de gehele getallen. De reden hiervoor is dat we in de elektronica soms te maken krijgen met heel grote en heel kleine grootheden tegelijk. Dan is het vaak handig, met hele machten van 10 te werken. Die hele exponenten mogen ook negatief zijn. Kijk nog eens naar Tabel 2.4-2. Dan wordt de reden waarom we er toch iets mee doen, waarschijnlijk duidelijk.

Exponenten in breukvorm bestaan ook maar die zijn voor het N-examen niet nodig, voor het F-examen wel. In hoofdstuk 2 van de F-cursus wordt daarop ingegaan.

2.17.4 Een wortel is het omgekeerde van een macht

Een wortel is het omgekeerde van een macht. Kijk nog eens naar het vierkant in Figuur 2.17-1. De oppervlakte ervan bedraagt 8^2 m^2 = 64 m^2. De lengte van één zijde van het vierkant is 8 m, de wortel uit 64 m^2. Aan de eenheden gaan we nu even voorbij en kijken alleen naar de getallen. We schrijven dan

$$\sqrt{64} = 8$$

uitgesproken als ‘de wortel uit 64 is 8’ of korter ‘wortel 64 is 8’. Het teken √ links van het getal 64 noemen we het ‘wortelteken’. Omgekeerd geldt:

$$8^2 = 64$$

We weten al dat “kwadraat” letterlijk “vierkant” betekent. De wortel waarmee we zonet hebben kennis gemaakt, is de omgekeerde bewerking van het kwadraat. Deze wortel staat daarom ook bekend onder de naam “vierkantswortel”.

Ale het gaat om het omgekeerde van een derde, vierde of nog hogere macht, spreken we over een derdemachts-, vierdemachtswortel, enzovoort. De vierdemachtswortel uit 16 is 2. Dat schrijf je zo:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2.2.2.2} = 2$$

Een kwadraat is altijd positief, want ook negatief maal negatief is positief en positief maal negatief kan geen kwadraat zijn, want dan gaat het over verschillende getallen of verschillende grootheden. Maar: als bij een wortel de negatieve waarde bedoeld wordt, bijvoorbeeld $\sqrt{16}$, schrijven we toch meestal -$\sqrt{16}$. Wat voor een kwadraat geldt, geldt voor alle even machten. Oneven machten kunnen wel negatief zijn. We vermelden dat alleen voor de volledigheid. Vragen erover zul je in een N-examen niet krijgen. In een F-examen trouwens ook niet.

Het kwadraat van een geheel getal is altijd een geheel getal. Maar niet elk geheel getal heeft, zoals 64, een geheel getal als wortel. Een getal met een geheel getal als wortel is het kwadraat van laatstgenoemd geheel getal. Voorbeelden: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$, enzovoort. Getallen met gehele wortels zijn dus 1, 4, 9, 16, 25, 36, enz.

Wortels van tussenliggende getallen bestaan, maar zijn geen gehele getallen. Voorbeeld: $\sqrt{2}$ is afgerond 1,414214. Probeer 1,414214 maar op je zakrekenmachine te kwadrateren of met zichzelf te vermenigvuldigen, dan kom je op een ietsje meer dan 2 uit. Dat komt door afronding van het wortelgetal. De tiendelige breuk als uitkomst van $\sqrt{2}$ is achter de komma oneindig lang. Voor de praktijk volstaan meestal één of twee cijfers achter de komma. In het geval van $\sqrt{2}$ is dat ongeveer 1,41. De omgekeerde waarde is ongeveer 0,71. Getallen die je als oneindige decimale breuk, maar niet als gewone breuk kunt schrijven, heten in de wiskunde *irrationale* getallen, letterlijk vertaald: onberedeneerbaar. Dit laatste is geen examenstof. Meer erover vind je op https://nl.wikipedia.org/wiki/Irrationaal_getal.

2.17.5 Samenvatting

- Een kwadraat is een getal of grootheid maal zichzelf
- Een vierkantswortel is de omgekeerde bewerking van het kwadraat. Meestal wordt een vierkantswortel gewoon "wortel" genoemd.
- Van elk positief getal bestaat een vierkantswortel, maar die is maar zelden een geheel getal.
- De wortel uit een negatief getal bestaat niet.

2.18 Voorrangsregels

2.18.1 Gemengde berekeningen

Het kan gebeuren dat we een gemengde berekening op ons bordje krijgen. Bijvoorbeeld één met optellen en vermenigvuldigen of een vermenigvuldiging met een macht erin. Soms spreekt de volgorde van werken vanzelf, maar niet altijd. Dan moeten we weten wat eerst moet en wat laatst. Anders kunnen we verschillende en vooral onbedoelde uitkomsten krijgen. Net als in het verkeer zijn er voorrangsregels.

2.18.2 Rangorde van bewerkingen

De oplettende lezer zal hebben gemerkt dat er een rangorde zit in het rijtje optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen. Vermenigvuldigen met een getal n is n stuks van hetzelfde getal of dezelfde grootheid optellen. Over de iets ingewikkelder vorm van vermenigvuldigen met een grootheid hebben we het nu even niet. Machtsverheffen tot een macht n is n stuks van hetzelfde getal of dezelfde grootheid vermenigvuldigen. Zoals gezegd, beperken we ons in deze cursus tot $n = 2$. We hebben zo optellen aan de basis, machtsverheffen aan de top en vermenigvuldigen er tussenin (Tabel 2.18-1).

Tabel 2.18-1. Rangorde van optellen, vermenigvuldigen en kwadrateren

	Machtsverheffen	
Getal met zichzelf vermenigvuldigen	⇑	*we beperken ons tot gehele exponenten*
	Vermenigvuldigen	
Getal bij zichzelf optellen	⇑	*een geheel of gebroken aantal keren*

Van die rangorde gaan we uit. Over aftrekken, delen en wortels hebben we het niet, want dat is niet nodig. Aftrekken is optellen van een negatief getal. Delen is vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde. Een *n-de* machtswortel is een macht met de omgekeerde waarde van n als exponent. Maar bedenk dat alles wat tussen haakjes staat, zonder uitzondering eerst aan bod komt. Daarmee hebben we de rekenregels vastliggen.

2.18.3 Rekenregels

Regel 1. Wat tussen haakjes staat, gaat altijd voor.

Regel 2. Machtsverheffen (in deze cursus alleen kwadrateren) gaat vóór vermenigvuldigen en vermenigvuldigen gaat vóór optellen. Daar hebben we dus onze rangorde weer in beeld. In $a + bc^2$ bereken je eerst c^2, dan vermenigvuldig je de uitkomst met b en telt dan pas a erbij op.

Wat hieronder aan regels volgt, is uitwerking van regel 1 en regel 2.

Regel 3. Optellen/aftrekken, zoals $a+b+c-d+f$ mag in willekeurige volgorde, maar de kans op fouten is het kleinst bij de volgorde zoals het er staat.

Regel 4. In een deling bereken je teller en noemer eerst. Pas daarna voer je de deling uit. Voorbeeld: in

$$\frac{a + b + c}{xy} \qquad (2.18\text{-}1)$$

bereken je eerst $a+b+c$ en xy, daarna deel je pas. Je leest het dus als

$$\frac{(a + b + c)}{(xy)} \qquad (2.18\text{-}2)$$

De lange deelstreep heeft voor teller en noemer dezelfde betekenis als haakjes. Wat erboven en eronder staat, bereken je eerst. Daarna komt pas de deling. Je mag de lange deelstreep dus zien als een verborgen stel haakjes voor teller èn noemer

Regel 5. Vermenigvuldigen, zoals $a.b.c$ mag in elke volgorde. Pas op als er een deling in zit. Zet die aan het eind, bijvoorbeeld $a.b.c/d$. Nog beter: schrijf

$$\frac{abc}{d} \qquad (2.18\text{-}3)$$

Dan is er geen misverstand mogelijk. Zie regel 4.

Regel 6. Bij wortels komt wat 'onder' het wortelteken staat, eerst. Voorbeeld: bij

$$\sqrt{ab} \qquad (2.18\text{-}4)$$

eerst ab uitrekenen, dan pas de wortel. Ook hier vervangt de lange horizontale streep aan het wortelteken dus een stel haakjes. Alweer verborgen haakjes!

$$\sqrt{ab}$$

is dus hetzelfde als

$$\surd(ab) \qquad (2.18\text{-}5)$$

Verwar dat niet met

$$\sqrt{a}.\,b \qquad (2.18\text{-}6)$$

want hier staat b niet meer onder de horizontale streep. Schrijf in zo'n geval $b\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt{a}.\,b$. Dat voorkomt misverstanden. Het is in de praktijk regel om het zo te doen.

Sommige lezers zullen op de basis- of lagere school het ezelsbruggetje *Mijnheer Van Dale Wacht Op Antwoord* hebben geleerd. Dat staat voor de volgorde **m**achtsverheffen, **v**ermenigvuldigen, **d**elen, **w**orteltrekken, **o**ptellen en **a**ftrekken. Stuur deze mijnheer per direct met pensioen en vergeet hem zo snel mogelijk. Houd je vooral aan regel 1 en 2. De rest volgt vanzelf.

2.18.4 Samenvatting

- Wat tussen haakjes staat, gaat altijd voor
- Verborgen haakjes zijn een lange deelstreep en de horizontale streep aan een wortelteken met daaronder optelling, vermenigvuldiging of wat voor bewerking ook
- Voor het overige geldt de rangorde: (1) macht, (2) vermenigvuldigen en delen, (3) optellen, inclusief het optellen van negatieve getallen of grootheden.

2.19 Opgaven

2.19.1 Opgave 2-21

Bereken: 3^2, 4^2, $(-4)^2$, 7^2, $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.19.2 Opgave 2-22

Schrijf als macht van 10 de getallen 1 000, 1 000 000, 0,1, 0,01, 0,001

Bereken met exponenten $200 * 50$; ${}^{1000}/_{0,1}$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.19.3 Opgave 2-23

Bereken 7+5-8*2+4 en 7+5-8*(2+3)

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.19.4 Opgave 2-24

Bereken 2^2+3-6 en 2.2-6

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.19.5 Opgave 2-25

Bereken 5.6/3.5 en (5.6)/(3.5)

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

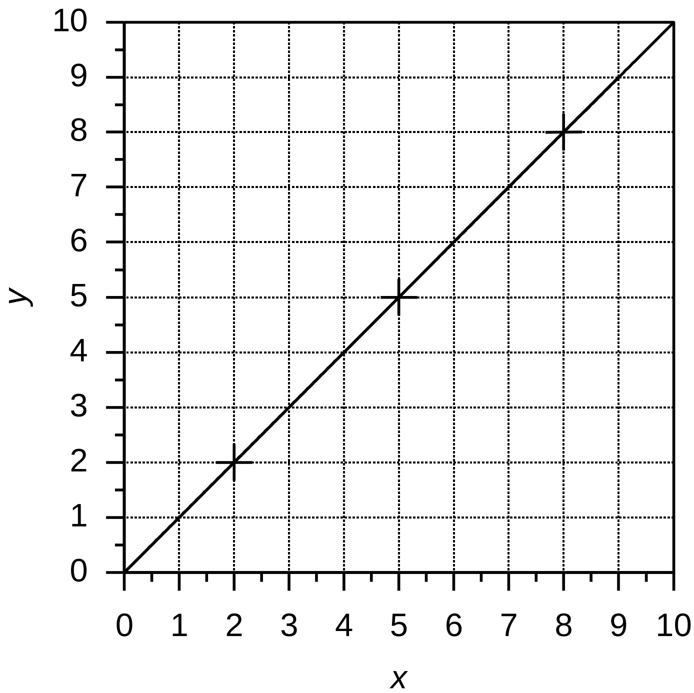
2.20 Grafieken

2.20.1 Wat zie je aan een grafiek?

Grafieken zijn bedoeld om verbanden tussen getallen en/of grootheden zichtbaar te maken. Eigenlijk hebben we er al kennis mee gemaakt in de vorm van Figuur 2.9-2 die de ontlading van een accu in de tijd weergeeft. Figuur 2.13-1 met de taartpunten ook. Ook in de natuur komen beelden voor die je grafieken zou kunnen noemen. Een voorbeeld is Foto 2.20-1. Daarop is een bosje in de duinen van Ameland te zien. De zeewind brengt behalve wind ook zout mee. Daar houden de bomen niet van. Het vermindert hun groei. De zoute wind waait hier van links naar rechts. De meest linkse bomen vangen het eerste zout op. Zo kan de volgende boom ietsje hoger groeien en zo verder. De foto toont zo een grafiek van groeiomstandigheden voor de bomen. Die worden van links naar rechts beter.

Foto 2.20-1.Een door zoute zeewind beïnvloed bosje in de duinen toont een natuurlijke grafiek van de verandering van de groei van bomen met toenemende beschutting tegen zoute wind.

Een lijngrafiek geeft het verband tussen twee grootheden of getallen. De eenvoudigste is $y = x$. Recept: teken een horizontale en een verticale lijn. Zet op de verticale y en op de horizontale x uit. In theorie kan het ook andersom, maar dat wordt praktisch nooit gedaan. We noemen die lijnen de *assen* van de grafiek. Vind nu enkele punten in de grafiek waar de horizontale afstand tot de y-as gelijk is aan de verticale afstand tot de x-as. Trek daar een rechte lijn doorheen. Een resultaat zie je in Figuur 2.20-1.



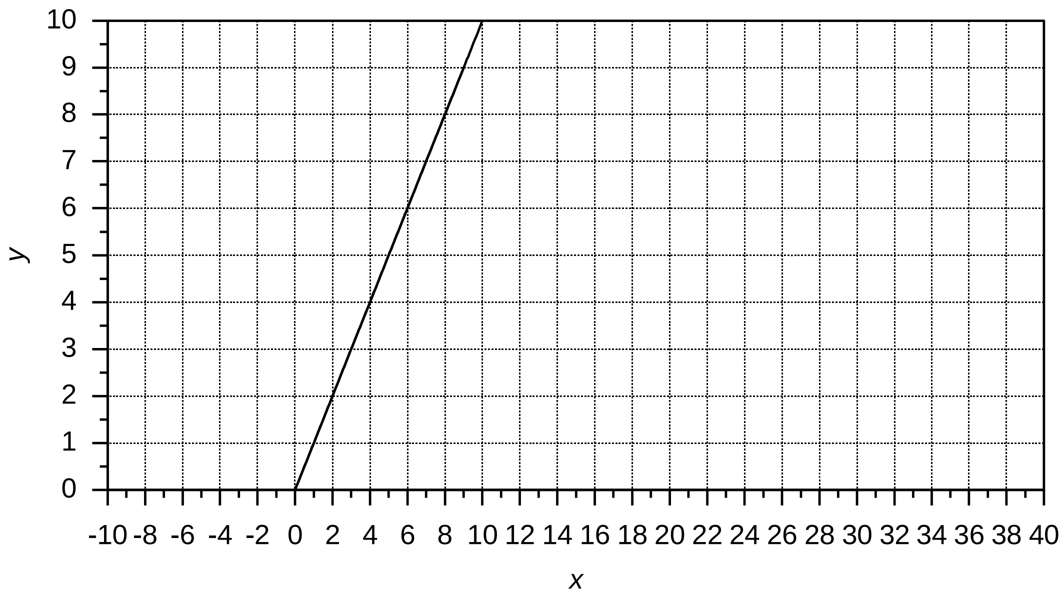
Figuur 2.20-1. Grafiek van y=x *voor* x *tussen 0 en 10. De drie kruisjes of plustekens staan voor enkele gevonden punten in de grafiek.*

Voor elke waarde van x vind je nu de bijbehorende waarde van y door vanaf de horizontale as, de x-as, recht omhoog te gaan naar de schuine lijn. Op het snijpunt ga je naar links en leest y af op het snijpunt met de y-as. In dit geval levert dat dezelfde waarde op. Zo hoort dat ook in een grafiek $y = x$.

Andere mogelijkheden voor de grafiek van Figuur 2.20-1 zijn:

- De kruisjes van de gevonden punten hadden ergens anders op de lijn mogen liggen. Het hadden er ook twee, vier of meer mogen zijn.
- Op de assen hadden ook negatieve getallen mogen staan, bijvoorbeeld een rijtje van -10 tot +5 of -100 tot 0. De lijn zou ook dan recht zijn geweest. Een voorbeeld van dezelfde grafiek maar met een andere x-as zien we in Figuur 2.20-2.
- De twee assen van de grafiek in Figuur 2.20-1 hoeven niet even lang te zijn of precies dezelfde getallen te tonen.

Neem nu een getal op de x-as, bijvoorbeeld 7,5. Ga vanaf dat punt recht omhoog tot je op de schuine lijn komt en ga vandaar horizontaal naar links tot je de y-as kruist. Als je het goed hebt gedaan, ben je op het punt y=7,5 aangeland.



Figuur 2.20-2. Grafiek van y=x voor x *tussen 0 en 10, net als Figuur 2.20-1. De* x*-as loopt nu van -10 tot +40 en de kruisjes zijn weggelaten.*

Nu Figuur 2.20-2. De x-as loopt nu van -10 naar +40. Vanwege de ruimte staan alleen de even getallen erop. We zeggen ook wel dat de *schaal* van de x-as en de *schaal* van de y-as ongelijk zijn.

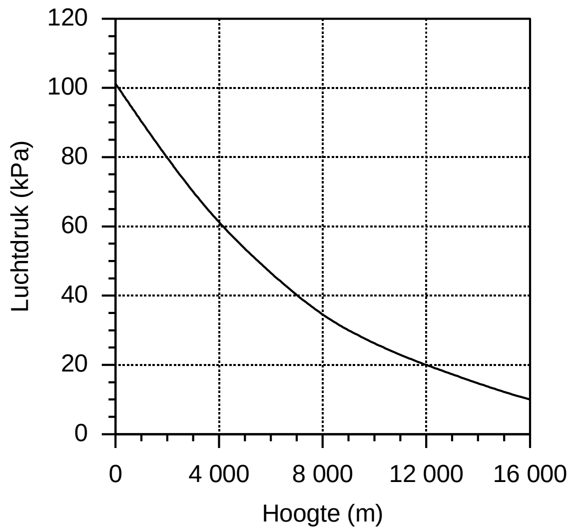
De lijn in de grafiek loopt steiler omhoog dan in Figuur 2.20-1. Dat komt doordat de opeenvolgende gehele getallen op de x-as dichter op elkaar staan. De lijn begint ook niet op de kruising van de assen, maar waar het getal 0 op de x-as staat. Had de y-as ook van -10 tot +40 gelopen, dan had ook de grafiek doorgelopen. Bedenk zelf hoe de grafiek $y = 2x$ eruit moet zien. Is die steiler of juist minder steil dan $y = x$?

2.20.2 Waarop moet je vooral letten bij een grafiek?

Bij een grafiek moeten we op minstens drie dingen letten

1. Wat staat op welke as?
2. De *schaal* van de assen
3. Het *nulpunt* van de assen.

Grafieken hoeven niet rechtlijnig te zijn. Kromme grafieken komen veel vaker voor dan rechte. Een voorbeeld is de afname van de luchtdruk met de hoogte boven het aardoppervlak. Een grafiek daarvan ziet er ongeveer uit als Figuur 2.20-3.



Figuur 2.20-3. Gemiddelde luchtdruk tegen de hoogte boven het aardoppervlak. Voorbeeld van kromme grafiek.

De luchtdruk staat aangegeven in kPa, voluit kilopascal. De pascal is in het SI-stelsel de eenheid van druk. De hoogte staat op de horizontale as. Gevoelsmatig zouden we die eerder op de verticale as zetten. Daar is niets op tegen. De grafiek van Figuur 2.20-3 heeft alleen maar een horizontale hoogte-as om te laten zien dat het ook anders kan en mag. Bij grafieken is het dus verplicht om te kijken, wat waar staat.

We kunnen bijvoorbeeld uit Figuur 2.20-3 aflezen wat ongeveer de luchtdruk op 5000 m hoogte is. Het streepje op de hoogte-as rechts van dat van 4000 m is dat van 5000 m. Tel zelf even na. Ga daarvandaan recht omhoog tot je de kromme lijn tegenkomt. Dan ga je horizontaal naar links naar de luchtdruk-as en je vindt ongeveer 55 kPa. Dat is ruim de helft van de druk op 0 m (zeeniveau) die gemiddeld ongeveer 101 kPa is.

Bij het maken van een grafiek zoals in Figuur 2.20-3 kun je niet volstaan met een paar punten en een liniaal, zoals in Figuur 2.20-1. In Figuur 2.20-3 heb je meer punten nodig om de kromme lijn goed te tekenen.

In de loop van deze cursus zul je verschillende soorten grafieken tegenkomen. Kijk altijd meteen wat op elke as staat. Dat hoort bij de as te staan, anders is het een onleesbare grafiek. Je zult grafieken tegenkomen die heel anders in elkaar zitten. Grafieken zijn er om iets in één oogopslag te kunnen zien of in elk geval om iets te verduidelijken. Dat neemt niet weg dat ze vooral van de onervaren lezer enig denkwerk kunnen vragen over wat nu precies wat is.

2.21 Vergelijkingen

2.21.1 Hoe zit een vergelijking in elkaar?

Een wiskundige vergelijking heeft de vorm van

- Iets is gelijk aan iets anders, geschreven als 'iets = iets anders'. Voorbeeld: $b = a + 1$.

- Iets is ongelijk aan iets anders, geschreven als 'iets ≠ iets anders'. Voorbeeld: $b \neq a + 1$
- Iets is groter dan iets anders, geschreven als 'iets > iets anders'. Voorbeeld: $b > a + 1$.
- Iets is groter dan of gelijk aan iets anders, geschreven als 'iets ≥ iets anders'. Voorbeeld: $b \geq a + 1$.
- Iets is kleiner dan iets anders, geschreven als 'iets < iets anders'. Voorbeeld: $b < a + 1$.
- Iets is kleiner dan of gelijk aan iets anders, geschreven als 'iets ≤ iets anders'. Voorbeeld: $b \leq a + 1$.

Voor 'vergelijking' wordt ook wel het woord 'formule' gebruikt. Wij gebruiken de wiskundig juistere term 'vergelijking'. Een vergelijking met een '=' betekent een gelijkheid. Die met een '>' , een '<' of '≠ ' een ongelijkheid. Die met een '≥' of een '≤'kunnen allebei zijn. Aan weerskanten van het vergelijkingsteken moet iets staan. Dat zijn de *leden* van de vergelijking, te onderscheiden in een linker- en een rechterlid. Als een van de twee ontbreekt, is de vergelijking niet af en kun je er niets mee.

2.21.2 Gelijkheden

De belangrijkste vergelijkingen die we in de elektronica gebruiken zijn gelijkheden. De belangrijkste vraag is hoe je daarmee omgaat om er iets zinnigs uit te krijgen. Als er verder niets bij een vergelijking staat, hoort hij algemeen geldig te zijn. We beginnen met

$$y = x + 2 \tag{2.21-1}$$

Daar kunnen we al wat aan zien. Om te beginnen is y groter dan x. Om precies te zijn: 2. Verder moet x een getal zijn, anders kun je 2 en x niet bij elkaar optellen. Dan moet y ook een getal zijn, want de leden aan weerskanten van het ´=´ teken moeten gelijk aan elkaar zijn. Anders is het '=' teken onwaar.

De waarden aan weerskanten van het '=' teken blijven aan elkaar gelijk als we in beide leden dezelfde bewerking uitvoeren. Voorbeeld: -2 erbij optellen Dus

$$y - 2 = x + 2 - 2 \tag{2.21-2}$$

Wat hetzelfde is als

$$y - 2 = x \tag{2.21-3}$$

Het resultaat is dat we de 2 van het rechter- naar het linkerlid hebben verhuisd. Bij die verhuizing verandert het teken. We hebben de bewering 'y is twee groter dan x' vervangen door 'x is 2 kleiner dan y'. Dat betekent hetzelfde. Wiskunde is uiteindelijk niet meer dan boerenverstand.

Met vermenigvuldigen gaat het net zo.

$$y = 2x \tag{2.21-4}$$

Hier is y dus het dubbele van x. y en x kunnen nu getallen of grootheden zijn. Maar de een kan niet een grootheid zijn terwijl de ander een getal is. Dan is de gelijkheid zoek.

Een getal maal een getal blijft een getal, een getal maal een grootheid is nog steeds een grootheid. Als we beide leden met hetzelfde getal of dezelfde grootheid vermenigvuldigen, blijft de gelijkheid in stand, net als bij de optelling van zonet. Vermenigvuldigen met ½ (is delen door 2) geeft

$$\frac{y}{2} = x \qquad (2.21\text{-}5)$$

De twee is verhuisd van het ene lid naar het andere met omkering van de waarde. Andersom mag ook, want het gaat om een gelijkheid:

$$x = \frac{y}{2} \qquad (2.21\text{-}6)$$

Hier staat dat x de helft van y is. Dat is een andere manier om te zeggen dat y het dubbele van x is. Dus alweer: toepassing van boerenverstand.

Met machten is het niet anders:

$$y = x^2 \qquad (2.21\text{-}7)$$

Het trekken van de (vierkants)wortel van beide leden levert

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} \qquad (2.21\text{-}8)$$

En dus

$$\sqrt{y} = x \qquad (2.21\text{-}9)$$

Of

$$x = \sqrt{y} \qquad (2.21\text{-}10)$$

2.22 Opgaven

2.22.1 Opgave 2-26

Teken op millimeterpapier (klik op het woord en druk af) de grafiek van de tabel met waarden voor x en y.

x	y
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.22.2 Opgave 2-27

Vind uit de vergelijking $x - 2 = 10$ de waarde van x door bij beide leden 2 op te tellen

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.22.3 Opgave 2-28

Hoeveel moet je in de vergelijking $x + 6 = 15$ bij beide leden optellen om de waarde van x te vinden?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.22.4 Opgave 2-29

Bereken x uit $7x = 14$ en uit ${}^{x}/_{2} = 1$.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.23 Evenredigheid

Bekijk de vergelijking

$$x = \frac{ab}{cd} \qquad (2.23\text{-}1)$$

Als a of b 2 keer zo groot wordt, dan wordt x ook 2x zo groot. De 2 mag je vervangen door ieder ander getal. Dat kennen we al van het vermenigvuldigen van beide leden met hetzelfde getal, zodat het '=' teken geldig blijft. We zeggen dan dat a en b *evenredig* zijn met x. Of x is *evenredig* met a en b. Dat betekent hetzelfde. In plaats van *evenredig* wordt ook wel de term *recht evenredig* gebruikt. Dat gebeurt vooral als er een onderscheid wordt gemaakt met *omgekeerd evenredig*.

Wat is *omgekeerd evenredig*? Voor x en c of d geldt het omgekeerde van het verband tussen x en a of b. Wordt c of d 2 maal zo groot, dan wordt x 2 maal zo klein. Je mag ook zeggen: wordt c of d ½ maal zo groot, dan wordt x 2 maal zo groot. Ook hier mag je 2 vervangen door ieder ander getal en ½ door het omgekeerde van dat andere getal. Dat noemen we *omgekeerd evenredig*. Die term ligt natuurlijk voor de hand, omdat in het rechterlid het omgekeerde gebeurt van wat links plaatsvindt. De waarde van x is in de vergelijking *omgekeerd evenredig* met c en d.

Deze termen zul je verderop in de cursus af en toe tegenkomen. Vanaf nu weet je wat ze betekenen.

2.24 Antwoorden bij de opgaven

2.24.1 Uitwerking van Opgave 2-1

In de zin ‘De seconde duurt één seconde’ staan

a. Twee eenheden

b. Twee grootheden

c. **Eerst een eenheid en daarna een grootheid**

Uitwerking

“De seconde” gaat over de eenheid seconde. “Één seconde” is 1 seconde. Dat is een getal maal een eenheid en dus een grootheid. Er staat dus een eenheid (“de seconde”), gevolgd door een grootheid (“één seconde”).

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

De volgende uitwerking staat op de volgende bladzijde. Zo voorkom je dat je ongewild al het antwoord op de volgende opgave krijgt. Wil je terug naar opgave 2-1, klik op de pijl “terug naar de opgave”; voor de volgende opgave klik je op de pijl “Naar de volgende opgave”.

2.24.2 Uitwerking van Opgave 2-2

Waarom kort men de minuut niet af met ‘m’?

Uitwerking

De afkorting ‘m’ staat voor ‘meter’. Omdat de meter een officiële SI- eenheid is en de minuut niet, krijgt de meter hier voorrang. De minuut moet het doen met ‘min’ of voluit worden geschreven.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.3 Uitwerking van Opgave 2-3

Welke voorvoegsels horen bij een biljoen en bij een biljoenste?

Uitwerking

Het voorvoegsel voor biljoen is ‘tera’, afgekort T. Denk bijvoorbeeld aan een harde schijf in een computer met een opslagcapaciteit van 1 TB, waarbij ‘B’ voor Byte staat. Byte kun je vertalen met “letterteken”, al is dat strikt genomen niet correct.

Het voorvoegsel voor een biljoenste is ‘pico’, afgekort p. Het komt vooral voor bij condensatoren, maar die komen pas in hoofdstuk 4 voor het eerst langs.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.4 Uitwerking van Opgave 2-4

Een bekende lengte-eenheid (maar geen SI-eenheid) die voor afstanden bij atomen en moleculen soms wordt gebruikt, is de ångström (ongeveer uitgesproken als 'ongstreum'), afgekort Å. 1Å is 100 pm. Hoeveel nm is dat? En hoeveel fm?

Uitwerking

100 pm=0,1 nm=100 000 fm. Tabel 2.4-2 moet hierbij kunnen helpen.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.5 Uitwerking van Opgave 2-5

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 miljoen km. Hoeveel m is dat? En hoeveel Gm?

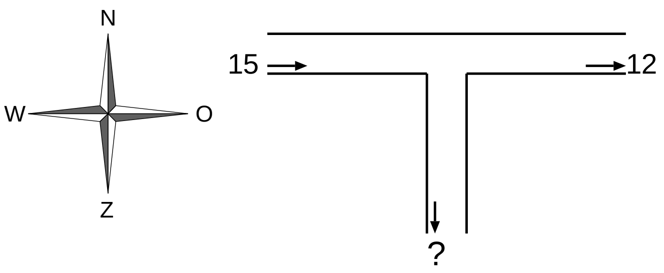
Uitwerking

150 miljoen km is in cijfers 150 000 000 km. Om van km m te maken, moeten er drie nullen bij: 150 000 000 000 m, dus in meters: 150 met negen nullen aan meters. Dat is 150 miljard m en dat is weer 150 Gm, want ‘giga’ staat voor 1 miljard.

Terug naar de opgave

2.24.6 Uitwerking van Opgave 2-6

Hieronder is een weg met T-kruising aangegeven. In 10 minuten tijd zijn er links van de kruising 15 voertuigen geteld die van west naar oost reden. Rechts van de kruising waren het er in diezelfde 10 minuten 12. Er waren geen voertuigen die van oost naar west reden en er is geen voertuig op de kruising blijven staan. Hoeveel voertuigen zijn in die 10 minuten rechtsaf geslagen?



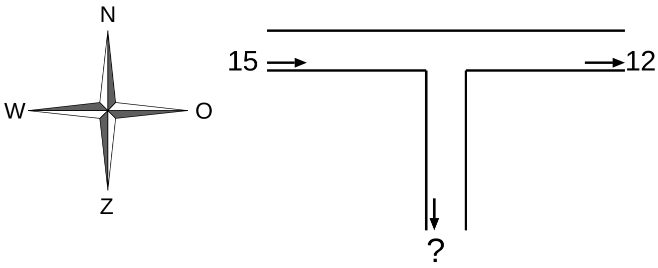
Uitwerking

Als er van west naar oost 15 voertuigen de kruising op rijden en er rijden er 12 vandaan, zijn we 15-12=3 voertuigen van de west-oost route kwijtgeraakt. Die moeten dus de tak naar het zuiden hebben genomen.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.7 Uitwerking van Opgave 2-7

Dezelfde berekening kun je ook doen met waterleidingbuizen, rivieren of stroomdraden. Lees de getallen in de figuur bij Opgave 2-6 bijvoorbeeld als liters per seconde. Hoeveel liter per seconde loopt er de leiding naar beneden in? (Hieronder nogmaals het plaatje van Opgave 2-6)



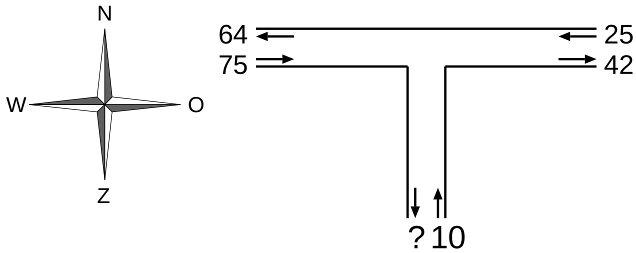
Uitwerking

De vraag komt erop neer dat we aantallen voertuigen per 10 minuten vervangen door evenveel liters per seconde. Dan gaan er dus 3 liter per seconde de leiding naar beneden in.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.8 Uitwerking van Opgave 2-8

Het is niet erg waarschijnlijk dat op de west-oost route in Opgave 2-6 alle voertuigen dezelfde kant op rijden. Daarom doen we die opgave nog eens met tweerichtingsverkeer.



Aanwijzing: bereken per tak van de kruising eerst hoeveel verkeer er netto in of uit rijdt. Denk niet dat iets vergelijkbaars in elektrische schakelingen niet kan. Het kan, maar je meet per tak de netto stroom!

Uitwerking

Links gaan er in 10 minuten netto 75-64=11 voertuigen richting de kruising. Rechts zijn dat 25-42=-17 voertuigen. Vanuit het zuiden rijden er 10 voertuigen naar de kruising. Naar de kruising zijn er dan netto 11-17+10=4 voertuigen gereden. Op de plek van het vraagteken komt dus 4 te staan. Je kunt het vraagstuk ook in één keer oplossen:
Op de plek van het vraagteken moet de som van alle voertuigstromen komen te staan. Een minteken is hier niet nodig, want de pijl wijst al van de kruising af. In Opgave 2-6 is al gegeven dat er geen voertuig op de kruising achterblijft. Voor het vraagteken zetten we het symbool *a*, maar elke andere letter mag ook (leestekens gebruiken we nooit als symbool). Dus a =75-64+25-42+10=4 voertuigen in 10 min. Zo kan het met enig vertrouwen in onze rekentechniek dus ook.

Terug naar de opgave

2.24.9 Uitwerking van Opgave 2-9

Een veld is 1 km lang en 300 m breed. Hoeveel m^2 (vierkante meter) is dat?

Uitwerking

Zet eerst de km om in m. Dan hebben we 1 km=1000 m. Dan 1000 m vermenigvuldigen met 300 m. Dat levert 300 000 m^2.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.10 Uitwerking van Opgave 2-10

Door een draad loopt een stroom van 1A. Dat is elke seconde 1 C. Hoeveel C is er in een minuut doorheen gelopen?

Uitwerking

1 minuut is 60 s. 60 maal 1 C is 60 C.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.11 Uitwerking van Opgave 2-11

Een volgeladen accu blijkt 10 uur lang een stroom van 0,5 A te kunnen leveren. Hoe groot is de capaciteit van de accu?

Uitwerking

$10\ \text{h} * 0{,}5\ \text{A} = 5\ \text{Ah}.$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.12 Uitwerking van Opgave 2-12

Hoeveel is 0.37,25? En 2.(-3)? En (-2).(-3)?

Uitwerking

In de vermenigvuldiging 0.37,25 wordt vermenigvuldigd met 0, dus is de uitkomst 0.

De vermenigvuldiging 2.(-3) bevat 1 getal met een minteken. De uitkomst is dus negatief, want 1 is een oneven getal. Dan mogen we ook schrijven -2.3 en dat is -6.

De vermenigvuldiging (-2).(-3) bevat twee mintekens, dus de uitkomst is positief. Dan hebben we dus hetzelfde als 2.3, uitkomst 6.

Terug naar de opgave

2.24.13 Uitwerking van Opgave 2-13

Op een amateurbeurs worden zakjes met geheimzinnige onderdelen aangeboden voor 2 euro per zakje. De verkoper begon met een lege kas. Aan het eind van de beurs heeft hij 157 euro in kas. Uit de kas heeft hij in totaal 5 euro uitgegeven aan koffie en soft ice. Hoeveel zakjes onderdelen heeft hij verkocht?

Uitwerking

Hij moet 157 +5 euro = 162 euro hebben ontvangen. Dat zijn ${}^{162}/_{2} = 81$ zakjes.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.14 Uitwerking van Opgave 2-14

Hoeveel is: 0/2, 2/0, 15/3, (-15)/3, 15/(-3) en (-15)/(-3)?

Uitwerking

0/2=0; 2/0=∞ (oneindig schrijf je als een 8 op zijn kant); 15/3=5; (-15)/3=-5, (-15)/(-3) = 5.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.15 Uitwerking van Opgave 2-15

Een accu van 15 Ah wordt gebruikt om een lamp te voeden die 1A gebruikt. Hoe lang hoort de accu het vol te houden als die bij het begin volledig is opgeladen? En als de lamp 3A gebruikt? Ga uit van een accu waarbij de capaciteit niet afhangt van de geleverde stroomsterkte (dat is in werkelijkheid niet helemaal zo).

Uitwerking

15 uur, want 15/1 is 15. Bij 3 A duurt het maar 5 uur, want 15/3 is 5.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.16 Uitwerking van Opgave 2-16

Is er verschil in uitkomst tussen $a.(b/c).d$ en $(a.b).d/c$? En tussen $a.(b/c).d$ en $a/\mathrm{c}.b.d$?

Uitwerking

Tussen $a.(b/c).d$ en $a.b.d/c$ is er geen verschil in uitkomst. Zie het als een vermenigvuldiging van a, b/c en d. Daarbij is de volgorde niet van belang en het maakt niet uit of je nu a, b, d of abd door c deelt. Probeer het eens met zelf bedachte getallen.

Met $a.(b/c).d$ en $a/\mathrm{c}.b.d$ is het bij $a.(b/c).d$ duidelijk wat we moeten doen: reken b/c uit en vermenigvuldig de uitkomst met a en met d. Bij $a/\mathrm{c}.b.d$ maakt het verschil of we eerst cbd uitrekenen en delen op a, of a delen door c en de uitkomst vermenigvuldigen met b en met d. Als je alles netjes van links naar rechts afwerkt is er geen verschil in uitkomst, maar verwarrend is het wel. Probeer ook dit met zelf bedachte getallen.
Als je a/c schrijft met een horizontale deelstreep, wordt het duidelijker: $a/\mathrm{c}.b.d$ wordt dan

$$\frac{a}{c}bd$$

Dat mag je ook schrijven als

$$\frac{abd}{c}$$

En dan is het (hopelijk) helemaal duidelijk.

Terug naar de opgave

2.24.17 Uitwerking van Opgave 2-17

Bereken:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}$$

Uitwerking

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1.4}{3.4}+\frac{1.3}{4.3}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{3.10}{5.10}+\frac{3.5}{10.5}=\frac{30+15}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1.8}{6.8}+\frac{3.6}{8.6}=\frac{8+18}{48}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2.2}{3.2}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}-\frac{5}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}=\frac{7}{10}-\frac{8}{10}=-\frac{1}{10}$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.18 Uitwerking van Opgave 2-18

Bereken:

$$5 : \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{14}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{26}{15}$$

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{3}$$

Uitwerking

$$5 : \frac{1}{2} = 5 . \frac{2}{1} = 10$$

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{14} = \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{7} = 1$$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{26}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{26}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{26}{13} = 2$$

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{3} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Terug naar de opgave

2.24.19 Uitwerking van Opgave 2-19

Schrijf als decimale breuk met hoogstens 6 cijfers achter de komma): 17 397/10, 17 397/100, 17 397/1000, 25/1000, 50/4, 25/11, 25/3, 25/7.

Uitwerking

$$17\,397/10 = 1\,739{,}7$$

$$17\,397/100 = 173{,}97$$

$$17\,397/1000 = 17{,}397$$

$$25/1000 = 0{,}025$$

$$50/4 = 12{,}5$$

$$25/11 = 2{,}272727$$

$$25/3 = 8{,}333333$$

$$25/7 = 3{,}571429$$

De drie laatste zijn afgerond zoals het hoort!

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.20 Uitwerking van Opgave 2-20

Een meetuitkomst is 4,23 eenheden. Er wordt een berekening mee gedaan op een zakrekenmachine die de uitkomst 6,761347890 geeft. Welke cijfers zijn hier betekenisloos en waarop rond je de uitkomst op een zinvolle manier af?
Doe hetzelfde voor een uitkomst 6,76561399; voor een uitkomst 6,76497865 en voor een uitkomst 7,79718223.

Uitwerking

De meting gaf drie cijfers. In de uitkomst van de berekening moeten dat er ook drie zijn. Als we de betekenisvolle cijfers in zwart zetten en de rest in rood, is de uitkomst 6,761347890. Omdat 6,76 dichter bij de uitkomst ligt dan 6,77, wordt het na afronding 6,76.
Bij 6,76561399 ligt de uitkomst het dichtst bij 6,77 en dus wordt afgerond op 6,77. Dat geldt niet voor 6,76497856, waar dan ook wordt afgerond op 6,76.
Voor 7,79718223 wordt afgerond op 7,80 en niet op 7,8.

Terug naar de opgave

2.24.21 Uitwerking van Opgave 2-21

Bereken: 3^2, 4^2, $(-4)^2$, 7^2, $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$

Uitwerking

$$3^2 = 3 * 3 = 9$$

$$4^2 = 4 * 4 = 16$$

$$(-4)^2 = (-4) * (-4) = 16$$

$$7^2 = 7 * 7 = 49$$

$$\sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5 * 5} = 5$$

$$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.22 Uitwerking van Opgave 2-22

Schrijf als macht van 10 de getallen 1 000, 1 000 000, 0,1, 0,01, 0,001

Bereken met exponenten $200 * 50$; ${}^{1000}/_{0,01}$

Uitwerking

$$1\,000 = 10^3$$

$$1\,000\,000 = 10^6$$

$$0{,}1 = 10^{-1}$$

$$0{,}01 = 10^{-2}$$

$$0{,}001 = 10^{-3}$$

$$200 * 50 = 2.10^2.5.10^1 = 2.5.10^{2+1} = 10.10^3 = 10^4 = 10\,000$$

$${}^{1000}/_{0,01} = \frac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3-(-2)} = 10^{3+2} = 10^5$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.23 Uitwerking van Opgave 2-23

Bereken 7+5-8*2+4 en 7+5-8*(2+3)

Uitwerking

$$7 + 5 - 8 * 2 + 4 = 12 - 16 + 4 = 0$$

$$7 + 5 - 8 * (2 + 3) = 7 + 5 - 8.5 = 12 - 40 = -28$$

In de tweede deelopgave zijn (opzettelijk) twee verschillende vermenigvuldigtekens gebruikt

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.24 Uitwerking van Opgave 2-24

Bereken 2^2+3-6 en 2^{1+1}-6

Uitwerking

$$2^2 + 3 - 6 = 2.2 + 3 - 6 = 4 + 3 - 6 = 7 - 6 = 1$$

$$2.2 - 6 = 2^2 - 6 = 4 - 6 = -2$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.25 Uitwerking van Opgave 2-25

Bereken 5.6/3.5 en (5.6)/(3.5)

Uitwerking

5.6/3.5 kun je ook schrijven als 5*6/3*5. Uitwerken:

$$5 * \frac{6}{3} * 5 = 5 * 2 * 5 = 50$$

De tweede deelopgave gaat zo:

$$\frac{5.6}{3.5} = \frac{30}{15} = 2$$

Het is dus opletten met de voorrangsregels!

Terug naar de opgave

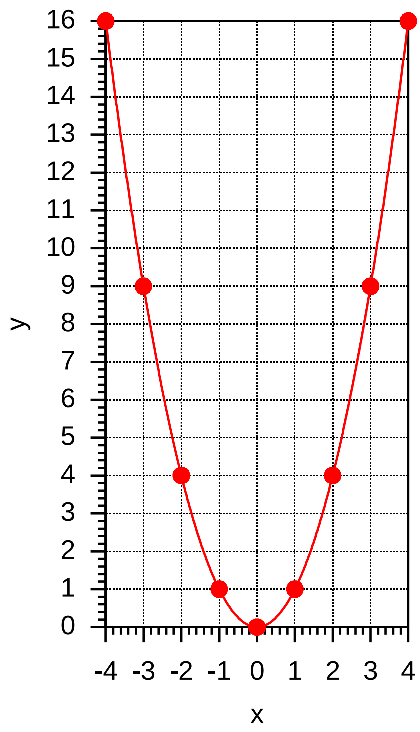
2.24.26 Uitwerking van Opgave 2-26

Teken op millimeterpapier (klik op het woord en druk af) de grafiek van de tabel met waarden voor *x* en *y*.

x	*y*
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Uitwerking

De grafiek is de grafiek van $y=x^2$. Hij moet eruitzien als het plaatje hiernaast. Dat is met de computer gemaakt en er is een vloeiende curve door de punten getrokken, maar als je rechte lijnen tussen opeenvolgende punten hebt gemaakt, heb je de bedoeling begrepen en is er dus niets mis mee.



Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.27 Uitwerking van Opgave 2-27

Vind uit de vergelijking $x - 2 = 10$ de waarde van x door bij beide leden 2 op te tellen.

Uitwerking

Dit doen we in zo klein mogelijke stapjes:

$$x - 2 = 10$$

$$x - 2 + 2 = 10 + 2$$

$$x + 0 = 12$$

$$x = 12$$

Dit komt neer op verplaatsen van -2 van het linker- naar het rechterlid met gelijktijdige omkering van het teken, dus van – naar +.

In feite doe je links en rechts van het =-teken steeds hetzelfde. Alleen dan blijft het =-teken gelden. Je probeert zo te komen tot een vergelijking $x = \cdots$ Dan is het vraagstuk opgelost.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.28 Uitwerking van Opgave 2-28

Hoeveel moet je in de vergelijking $x + 6 = 15$ bij beide leden optellen om de waarde van x te vinden?

Uitwerking

In zo'n geval wil je eindigen met een vergelijking in de vorm $x = iets$

Om dat in de vergelijking $x + 6 = 15$ te bereiken, moet van het linker lid het getal 6 worden afgetrokken. Dan blijft alleen x over. Om het = teken geldig te laten blijven, moet die 6 ook van het rechterlid worden afgetrokken:

$$x + 6 - 6 = 15 - 6$$

En dan:

$$x = 9$$

Omdat de vraag was hoeveel er bij beide leden moet worden opgeteld, is het antwoord daarop niet 6, maar -6.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.24.29 Uitwerking van Opgave 2-29

Bereken x uit $7x = 14$ en uit $x/_2 = 1$.

Uitwerking

$$7x = 14$$

Om links x te krijgen, moet worden gedeeld door 7:

$$x = {}^{14}/_{7} = 2$$

Nu de andere deelopgave.

$$x/_2 = 1$$

Ook hier willen we links x overhouden. Dat vraagt om vermenigvuldigen met 2:

$$x = 1.2 = 2$$

Terug naar de opgave