Inhoudsopgave

2 Basiskennis

2.1 Wat leer je in dit hoofdstuk

Dit hoofdstuk gaat over kennis die nodig is om de rest van deze cursus te kunnen volgen. Sommigen zullen het kunnen overslaan. Anderen zullen het af en toe als naslagwerk gebruiken en weer anderen zullen het echt nodig hebben om hun kennis bij te spijkeren.

Radio is toegepaste natuurkunde. In de natuurkunde draait het om processen. In een zender speelt zich het proces af van de omzetting van elektrische energie in radiogolven. Als je dat precies bekijkt, gaat het zelfs om een aantal processen op rij.

Bij natuurkundige processen horen getallen, eenheden en grootheden. Daar beginnen we dan ook mee. Je maakt kennis met eenhedenstelsels. Nadruk ligt op het SI-eenhedenstelsel dat in de wereld veruit het wijdst verbreide stelsel is. Je leert het verschil tussen getallen, eenheden en grootheden. Daar hoort een verschil in schrijfwijze bij. Een beetje wiskunde hoort er ook bij. Die houden we eenvoudig. Wiskunde is de taal van de natuurkunde. Het prettige eraan zijn de vaste regels. Kom daar eens om bij een taal als Nederlands. Als je wilt, kun je een hier een ouderwets voorbeeld bekijken. Er is sindsdien weinig veranderd.

We beginnen ons wiskundige deel met rekenen. Daarbij gaat het niet alleen over getallen, maar ook over grootheden en eenheden. Je zou het natuurkundig rekenen kunnen noemen. Alle gebruikelijke bewerkingen komen langs. Je ziet dat optellen en aftrekken in wezen hetzelfde kunstje zijn: aftrekken is optellen met een negatief getal. Een optelling blijkt niet meer dan een opsomming van getallen met een + of – ervoor. Bij vermenigvuldigen en delen is het weinig anders. Een deling is eenvoudig om te zetten in een vermenigvuldiging.

We gaan daarna verder met hele en gebroken getallen en tiendelige breuken. Wortels en machten blijken ook niet van elkaar te verschillen, omdat je elke wortel kunt schrijven als een macht. We gaan daarbij van hele naar gebroken machten en langs die weg komen we uit bij logaritmen en decibels. Onderweg nemen we ook procenten mee, want dat is verplichte kennis voor het zendexamen.

Ook komen verschillende getallenstelsels aan de orde. Het zendexamen vraagt kennis van digitale elektronica. Die berust niet op ons tientallige stelsel, maar op het tweetallige. Dat is de wereld van nullen en enen. Verwant daarmee is het zestientallige stelsel. Daarover zullen we het dus ook hebben.

Dan komen grafieken aan de beurt, gevolgd door het werken met eenvoudige wiskundige vergelijkingen en de stelling van Pythagoras die we bij de wisselstroomtheorie nodig zullen hebben. Voor de wisselstroomtheorie is het ook nodig dat we ons verdiepen in een stukje van de goniometrie, namelijk de sinus en de cosinus.

Aan het eind volgt een lichtvoetige behandeling van twee beginselen uit de thermodynamica. Die hoef je niet diepgaand te kennen, maar je moet wel snappen waar het om draait.

2.2 Rekenmachine

De wiskunde die je nodig hebt voor het zendexamen is niet meer dan wat in dit hoofdstuk wordt behandeld. Het rekenwerk dat erbij hoort, kun je misschien zonder rekenmachine af. Toch is bij het examen een **niet-programmeerbare** zakrekenmachine toegestaan. Het hele examenreglement vind je op de site van de Stichting Radio Examens, https://radio-examen.nl/. Als je een rekenmachine niet zo gewend bent en niet erg goed bent in hoofdrekenen, train jezelf dan op zo'n ding. Op het examen heb je per vraagstuk gemiddeld maar een paar minuten!

Je zakrekenmachine moet wat meer kunnen dan alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Machten, wortels, logaritmen, sinus en cosinus moeten er liefst wel op zitten.

2.3 Navigeren bij de opgaven

In deze cursus kom je af en toe opgaven tegen. Daarmee kun je je opgedane kennis toetsen. In dit hoofdstuk zijn dat de enige opgaven. Bij volgende hoofdstukken vind je ook echte examenopgaven. In elk hoofdstuk zelf zitten opgaven van hetzelfde soort als examenopgaven, maar ze zijn daar zelden uit overgenomen. Een of meer aparte bestanden bij de hoofdstukken 3 en hoger bevatten opgaven die wel aan examens zijn ontleend. Ze bevatten opgaven die betrekking hebben op de leerstof van bijbehorende hoofdstuk. Ze worden op de cursussite aangekondigd als "Examentraining".

Dat ze er bij dit hoofdstuk niet zijn, is omdat de inhoud bij het examen bekend wordt verondersteld. Je wordt dus niet geëxamineerd op de inhoud van dit hoofdstuk, maar je hebt de kennis nodig bij het maken van examenopgaven.

In alle opgavenbestanden gebruiken we dezelfde navigatiesymbolen. Het zijn er drie. De eerste is deze:

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

Je vindt hem onder de opgave. Klik erop als je denkt, het goede antwoord te weten en hij stuurt je naar de uitwerking en/of het antwoord.

Onder de uitwerking/het antwoord vind je in elk geval deze:

Terug naar de opgave

Klik erop en je gaat terug naar de opgave. Hij maakt terugscrollen overbodig.

Als er nog een volgende opgave in het rijtje is, kun je daar met één muisklik naartoe via deze:

Naar de volgende opgave

De groene pijl zal ontbreken als je het rijtje opgaven hebt gehad. Anders staat hij er met de rode pijl. Dit systeem hanteren we door de hele cursus, dus ook in de examentraining.

Bij een uitwerking herhalen we altijd de opgave, want de oorspronkelijke opgave is dan buiten zicht. De uitwerking staat onder het vetgedrukte kopje **Uitwerking**.

2.4 Getallen, eenheden en grootheden

2.4.1 Inleiding

Rekenen hoort bij wiskunde. Rekenen gaat over getallen. Getallen zijn ongrijpbaar. Ze krijgen pas betekenis als je ze verbindt met iets uit de echte wereld. Bij een getal als 4 kun je je pas iets voorstellen als het getal op iets betrekking heeft, bijvoorbeeld ‘vier wielen’. Kinderen op de basisschool rekenen in het begin niet voor niets op hun tien vingers. Het telraam is ook zo’n vorm van rekenen.

In de natuurkunde verbinden we getallen met eenheden. Uitdrukkingen als ‘acht meter’ of ‘twintig seconden’ zeggen ons iets. ‘Acht meter’ drukt een lengte uit, ‘twintig seconden’ een tijdsduur. De meter en de seconde zijn hier de *eenheden*. De combinatie van een getal en een eenheid heet *grootheid*. Woorden als ‘lengte’ en ‘tijdsduur’ duiden ook een grootheid aan, want je geeft ze aan met een getal en een eenheid. Een zin als ‘dit pad is 900 lang’ betekent niets; ’dit pad is 900 meter lang’ wel. Een grootheid kun je meten en dat doe je in eenheden. Kijk bijvoorbeeld eens op http://www.dr-aart.nl/Meetkunde-grootheden-en-eenheden.html.

2.4.2 Eenhedenstelsels

De mens heeft alle eenheden georganiseerd in stelsels. In een modern stelsel is alles gebaseerd op het getal 10 (0,1; 1; 10; 100; 1000, enz.). Met eenheden als 12 inch in een voet, 3 voet in een yard, 220 yard in een furlong en 8 furlong in een mijl is het lastig rekenen. Met meters en kilometers gaat dat veel gemakkelijker. We zijn nu eenmaal gewend om in het tientallig stelsel te rekenen.

De bedoeling van een eenhedenstelsel is vooral dat voor de uitkomst van berekeningen zo min mogelijk omrekeningsgetallen hoeven te worden gebruikt. Eenheden van een stelsel moeten dus zo goed mogelijk op elkaar aansluiten. Sinds 1960 gebruikt men wereldwijd, behalve in de Verenigde Staten, Liberia en Myanmar, het *SI-eenhedenstelsel*. SI is een afkorting van de Franse benaming *Système international d’unités*, ofwel Internationaal Eenhedenstelsel. Het is sinds 1978 in Nederland het enige toegelaten stelsel. Wie er meer van wil weten kan bijvoorbeeld terecht op Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/SI-stelsel) en/of https://nl.wikipedia.org/wiki/Natuurkundige_grootheden_en_eenheden.

2.4.3 Basiseenheden in het SI-stelsel

Het SI-stelsel is gebaseerd op zeven onafhankelijke basiseenheden. 'Onafhankelijk' wil zeggen dat ze niet uit elkaar zijn af te leiden.

Ze staan met de grootheden waarop ze betrekking hebben en hun standaardafkortingen in Tabel 2.4-1.

Tabel 2.4-1. Basiseenheden in het SI-stelsel.

Grootheid	SI-basiseenheid	
	Naam	**Afkorting**
Lengte	meter	m
Massa	kilogram	kg
Tijd	seconde	s
Elektrische stroom	Ampère	A
Temperatuur	Kelvin	K
Hoeveelheid van een stof	mol	mol
Lichtsterkte	candela	cd

Opmerkingen bij Tabel 2.4-1

- Met mol en candela krijgen we in deze cursus niet te maken. Daarom zijn ze met grijze letters aangegeven.
- Een K is even groot als een graad Celsius (ºC). Het verschil is het nulpunt. 0 K = -273,14 ºC, het *absolute nulpunt.* Bij die temperatuur is er geen warmte-energie. Kouder kan dus niet, vandaar de naam. Vaak wordt het afgerond op -273 ºC. Als het over **verschillen** in temperatuur gaat, maakt het niet uit welke van de twee je gebruikt. In de dagelijkse praktijk zien we de ºC veel vaker dan de K.
- Eenheden die naar een persoon zijn genoemd, worden afgekort met een hoofdletter, alle andere met een kleine. Ampère en Kelvin zijn namen van bekende personen uit de geschiedenis van de natuurkunde, vandaar de hoofdletter.

2.4.4 Voorvoegsels

Grootheden kunnen variëren tussen triljoenen eenheden of nog groter en triljoensten van een eenheid of nog kleiner. In plaats van getallen met heel veel nullen gebruiken we dan liever voorvoegsels zoals nano, micro, mega of giga. Ook die zijn internationaal gestandaardiseerd. Ze worden gebruikt bij SI-eenheden, maar ook bij andere. Een voorvoegsel praat en leest gemakkelijker dan grote getallen, want je hoeft niet steeds al die nullen te tellen. In Tabel 2.4-2 staan de meeste opgenoemd. Er zijn nog grotere en nog kleinere, maar in de radiotechniek gebruiken we die eigenlijk nooit. Geïnteresseerden kunnen ze vinden op Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/SI-voorvoegsel).

Tabel 2.4-2. Voorvoegsels in eenhedenstelsels

Voor-voegsel	Symbool	Getal	In cijfers	10^n
exa	E	triljoen	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	biljard	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	biljoen	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	miljard	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	miljoen	1 000 000	10^{6}
kilo	k	duizend	1 000	10^{3}
hecto	h	honderd	100	10^{2}
deca	da	tien	10	10^{1}
-			1	10^{0}
deci	d	een tiende	0,1	10^{-1}
centi	c	een honderdste	0,01	10^{-2}
milli	m	een duizendste	0,001	10^{-3}
micro	µ	een miljoenste	0, 000 001	10^{-6}
nano	n	een miljardste	0, 000 000 001	10^{-9}
pico	p	een biljoenste	0, 000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	een biljardste	0, 000 000 000 000 001	10^{-15}
atto	a	een triljoenste	0, 000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Opmerkingen bij Tabel 2.4-2

- De meest rechtse kolom met de kop 10^n zal niet voor iedereen gesneden koek zijn. Het klein gedrukte getalletje rechts boven de 10 is de *macht*. Een ander woord ervoor is de *exponent*. Later in dit hoofdstuk gaan we in op de diepere betekenis ervan. Voor nu is het genoeg om te weten dat de exponent van het getal 10 het aantal nullen rechts van de 1 aangeeft. 10^0 is dus gelijk aan 1, 10^6 aan 1 000 000, of in letters: een miljoen. Je spreekt het naar keuze uit als “tien tot de zesde” of “ tien tot de macht zes”. Als voor de exponent een minteken staat, betekent dat evenveel nullen links van de 1 met de komma tussen de twee meest linkse in. Dus 10^{-6} = 0,000 001 ofwel één miljoenste, uitgesproken als ‘tien tot de macht min zes’ of ‘tien tot de min zesde’. Cijfers ’achter de komma’ behandelen we bij de tiendelige breuken.
- Kijk uit met *miljard* (10^9), *biljard* (10^{15}), enz. In Engelstalige teksten kent men het achtervoegsel *-jard* niet, alleen maar *-joen*. Bij ‘a billiard’ denkt men aan een biljarttafel. Een miljard is daar *a billion* en wat wij een biljoen (10^{12}) noemen wordt *a trillion*, enzovoort. Internationaal standaardiseren is lastig.
- De cijfers in de kolom ‘in cijfers’ zijn verdeeld in blokjes van drie met een spatie (lege positie) ertussenin. Dat vergemakkelijkt het tellen. Meer betekenis heeft het niet. Soms zet men in plaats van de spatie een punt. Dat kan verwarrend zijn, omdat in sommige Engelstalige landen een punt wordt geschreven in plaats van onze komma. Ook de meeste zakrekenmachines doen dat (helaas!). Om de verwarring nog wat te vergroten, worden komma’s dan vaak gebruikt als scheidingsteken tussen de blokjes van drie.
- Alle voorvoegsels hebben kleine letters als ze voluit worden geschreven. De voorvoegsels ‘kilo’ en kleiner worden afgekort met een kleine letter, alle grotere met een hoofdletter. Een mm en een Mm zijn dus niet hetzelfde. Een mm is een millimeter, het duizendste deel van een meter. Een Mm is een megameter, dat is 1 miljoen meter, ofwel 1000 km.
- Er staat één Griekse letter in de lijst. Dat is de ‘µ’ (spreek uit: ‘mu’), de afkorting van ‘micro’. In oudere teksten vind je hem soms terug als ‘u’. De hoofdoorzaak daarvan is het ontbreken van Griekse letters op ouderwetse typemachines. De ‘u’ lijkt dan nog het meest op de ‘µ’.
- De vergrotende voorvoegsels ‘mega’ en hoger eindigen op een *a*, ‘kilo’ en lager op een *o*. ‘milli’, ’centi’, ‘deci’ en ‘deca’ zijn uitzonderingen en een erfenis uit vroeger tijden.
- Het enige tweelettervoorvoegsel ‘da’ (maal 10) wordt tegenwoordig afgeraden. Het is in een systeem met stappen van drie nullen voor of achter de komma ook onnodig. Dat geldt ook voor de voorvoegsels ‘h’, ‘d’ en ‘c’. Je ziet ze nog wel in sommige eenheden, zoals ha (hectare, geen SI-eenheid), dm (decimeter) en cm (centimeter). In de radiotechniek kom je ze niet of nauwelijks (meer) tegen.
- De kilogram (kg) is met zijn voorvoegsel ‘k’ eigenlijk een rare basiseenheid. Ook dat is een erfenis. Die komt uit de tijd waarin een eenhedenstelsel werd gebruikt met de gram (g) als eenheid van massa. 1 000 000 kg is dus niet een Mkg, maar een Gg

(gigagram). In het spraakgebruik hebben we het dan vaak over 1000 ton, maar de ton (1000 kg) is geen officiële SI-eenheid.
- Je gebruikt de voorvoegsels het liefst zo, dat de bijbehorende getallen kleiner dan 1000 en groter dan 0,001 zijn. Voorbeeld: '10 000 m' mag best, maar schrijf liever '10 km'.
- Probeer liever niet om dit alles uit je hoofd te leren. Het went vanzelf als je wat langer met de cursus bezig bent.

Met de eenheden voor tijd is men minder consequent geweest. Er zitten nog steeds 60 seconden in een minuut, 60 minuten in een uur en 24 uren in een dag of etmaal. Daar is weinig tientalligs aan. Vooral daarom wordt vooral de eenheid uur nog steeds gebruikt, al is de seconde (s) de officiële SI-eenheid. Het uur wordt internationaal afgekort tot h (van het Latijnse *hora* voor *uur*). Een uur is dus 3600 s of 3,6 ks. Vrijwel niemand gebruikt die termen.

De eenheid minuut gebruiken we in de natuurkunde weinig. De afkorting is meestal 'min', maar 'minuut' wordt ook wel eens voluit geschreven.

Uren, minuten en seconden zijn een erfenis uit de Babylonische beschaving, zo'n 4000 jaar geleden. Toen gebruikte men in plaats van het tientallig stelsel het zestigtallige, in de vorm van een combinatie van vijf- en twaalftallig. De verdeling van de cirkel in 360 graden (6 maal 60) hoort ook bij die erfenis.

2.4.5 Afgeleide eenheden

Afgeleide eenheden zijn altijd een combinatie van basiseenheden. Snelheid bijvoorbeeld is lengte per tijd. Die kun je uitdrukken in meter per seconde (m/s) of km/uur (km/h). We zullen in de loop van deze cursus verschillende afgeleide eenheden tegenkomen.

2.4.6 Samenvatting

- Getallen hebben in de natuurkunde en dus ook in de radiotechniek pas betekenis als ze met een eenheid worden gecombineerd tot een grootheid.
- We gebruiken basiseenheden die tot het SI-stelsel behoren of eenheden die daarvan zijn afgeleid, met hun officiële afkortingen.
- Heel grote of heel kleine eenheden schrijven we met voorvoegsels volgens Tabel 2.4-2.

2.5 Opgaven

2.5.1 Opgave 2-1

In de zin 'De seconde duurt één seconde' staan

a. Twee eenheden

b. Twee grootheden

c. Eerst een eenheid en daarna een grootheid

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.2 Opgave 2-2

Waarom kort men de minuut niet af met 'm'?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.3 Opgave 2-3

Welke voorvoegsels horen bij een biljoen en bij een biljoenste?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.4 Opgave 2-4

Een bekende lengte-eenheid (maar geen SI-eenheid) die voor afstanden bij atomen en moleculen soms wordt gebruikt, is de ångström (ongeveer uitgesproken als 'ongstreum'), afgekort Å. 1Å is 100 pm. Hoeveel nm is dat? En hoeveel fm?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.5.5 Opgave 2-5

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 miljoen km. Hoeveel m is dat? En hoeveel Gm?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.6 Schrijfwijze van getallen, eenheden, grootheden en symbolen

In de natuurkunde schrijven we vaak in symbolen. Dat is kort en alles blijft overzichtelijk. Voor wie daar niet aan gewend is, lijkt het in het begin misschien lastig, maar het went. Symbolen zijn nuttig als de getalswaarde ervan niet bij voorbaat vaststaat. Als een getal bijvoorbeeld met n wordt weergegeven, betekent dit dat het alle denkbare waarden kan hebben. Je kunt bijvoorbeeld n munten in de portemonnee hebben. Als je er twee uitgeeft, heb je er vanaf dat ogenblik n-2 in zitten. Dat geldt voor alle waarden van n van 2 of meer, want minder dan 0 munten in de portemonnee kan niet. Als je wisselgeld terugkrijgt, wordt het aantal n-2+m. Daarbij stelt m het aantal munten wisselgeld voor. De schrijfregels in de natuurkunde zijn:

- Getallen staan rechtop, zoals het getal 27.
- Eenheden en hun voorvoegsels staan rechtop, zoals m, s of km.
- Namen van eenheden worden afgekort met een kleine letter zoals s voor seconde, behalve als ze zijn genoemd naar een persoon, zoals A voor ampère.
- Voluit geschreven eenheden beginnen altijd met een kleine letter.
- Tekens voor bewerkingen staan rechtop, zoals een + (plus).
- Symbolen voor grootheden staan *schuin gedrukt*. Dat noemen we ook *cursief*. Voorbeeld: I voor stroomsterkte. Symbolen kunnen hoofdletters, kleine letters, Griekse letters of zelfs Hebreeuwse letters zijn. Die laatste zullen we niet tegenkomen, Griekse letters weinig.
- Symbolen voor getallen staan net als die voor grootheden *cursief*. Voorbeelden: a, n, m, x. m is dus iets anders dan m, want de rechtopstaande m staat voor de eenheid meter.

2.7 Optellen en aftrekken

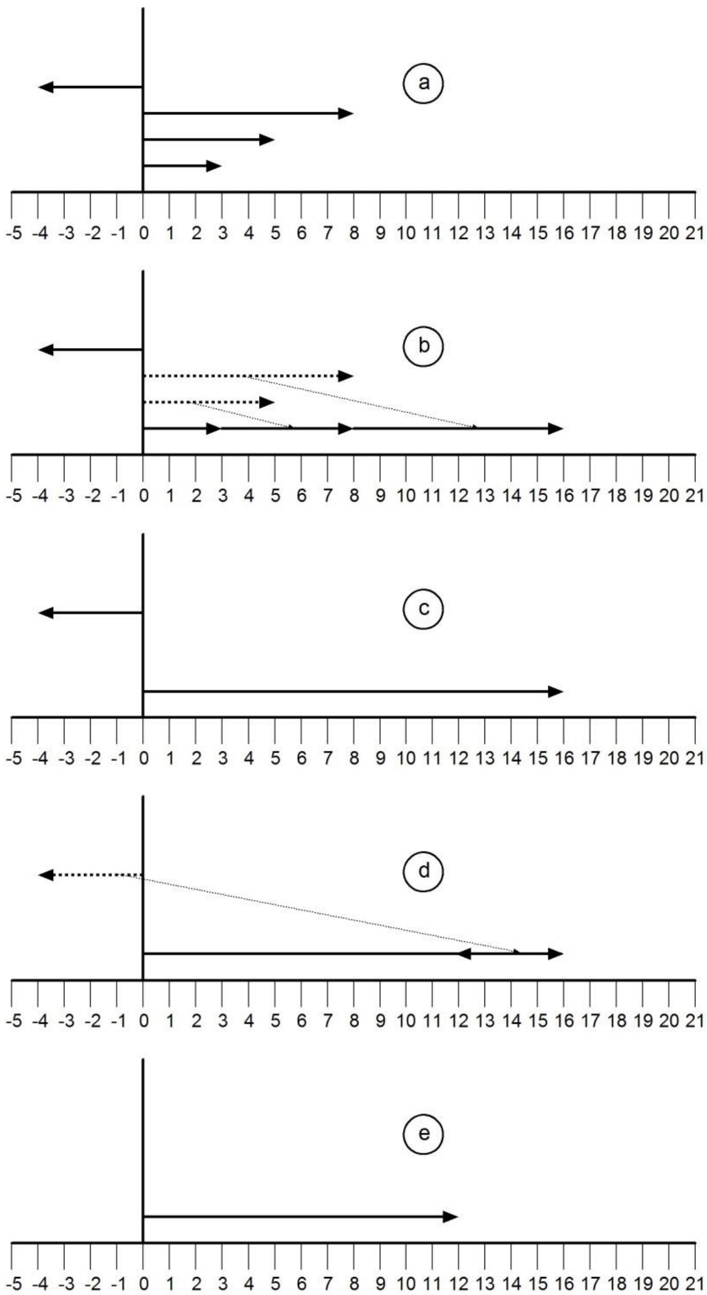
2.7.1 Plussen en minnen

Getallen kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken. In Figuur 2.7-1 maken we zulke bewerkingen zichtbaar.

Getallen zijn afgebeeld als stukjes rechte lijn met elk een pijlpunt. Ze zijn achtereenvolgens 3, 4, 5 en 8 eenheden lang. Omdat het lengten zijn, zijn het eigenlijk geen getallen, maar grootheden. Zuivere getallen kun je niet afbeelden.

De pijlpunt van het stukje lijn met lengte 4 wijst naar links, de andere drie naar rechts. Aan de liniaal onderin de plaatjes zien we links de negatieve getallen, dus die met een '-' (minteken) en rechts de positieve getallen. Dat is zo gebruikelijk, dat het bijna nooit andersom wordt gedaan.

Positieve getallen schrijven we meestal zonder '+', maar bijvoorbeeld '+21' is niet fout. De pijlen naar rechts geven een positief getal aan, de pijl naar links een negatief. We hebben dus te maken met de getallen +3, -4, +5 en +8. De '+' en de '-' noemen we het *teken*. De tekens '+' en '-' zijn elkaars *tegengestelde*.



Figuur 2.7-1. De optelling 3+5+8-4.

In Figuur 2.7-1b tellen we op. Hier is dat het achter elkaar zetten van de naar rechts wijzende pijlen. De achterkant van een pijl komt telkens op de voorkant van een andere. In Figuur 2.7-1c zijn ze versmolten tot één pijl met een lengte van 16 eenheden, dus 3+5+8=16. In welke volgorde de pijlen achter elkaar worden geplaatst, doet er niet toe. Het resultaat is altijd een pijl van 16 eenheden lang.

Nu het negatieve getal. Aftrekken is hetzelfde als optellen met een negatief getal. De pijl van -4 komt dus met zijn achterkant op de pijlpunt van +16 (Figuur 2.7-1d). Hij wijst naar links en we houden zo een pijl van +12 eenheden lang over (Figuur 2.7-1e). Dus 3+5+8-4=12.

Het hele proces is ook weergegeven in een korte animatie.

Een optelling als 3+5+8-4 is eigenlijk niet meer dan een opsomming van getallen met hun tekens. Daarbij doet de volgorde er niet toe, zolang je de zaak getal voor getal afwerkt. Doe je dat anders, dan kun je fouten krijgen. Schrijf de optelling maar eens in de volgorde 3+5-4+8. Als je eerst 4+8 uitrekent en dan pas het minteken toepast, dan krijg je 3+5-12 en daaruit komt -4 en geen 12! Je hebt dan 3+5-(4+8) uitgerekend in plaats van 3+5-4+8. De haakjes betekenen dat je eerst moet uitrekenen wat ertussen staat. Zonder haakjes (en binnen de haakjes) werk je het rijtje af van links naar rechts.

De uitkomst van een optelling heet de *som*. Als $a + b = c$, dan is c de *som* van a en b.

2.7.2 Tekens gecombineerd

We hebben gezien dat een aftreksom hetzelfde is als een optelsom met een negatief getal. Een aftreksom met een negatief getal wordt een optelsom met een positief getal. - -3 is gelijk aan +3. Min min is plus. '--3' schrijf je bij voorkeur als '-(-3)'. Dat is duidelijker dan '- -3'.

2-(-3) is dus 2+3=5. –(+3) en +(-3) zijn hetzelfde als -3. Voor alle getallen en grootheden, noem ze voor de gelegenheid a, geldt $-(+a)=-a$ en $+(-a)=-a$.

Min min (--) is dus samen plus, plus plus (++) ook. Min plus (-+) is min en plus min (+-) is ook min. Twee gelijke tekens samen is altijd een plus, twee ongelijke maken een min.

2.7.3 Teken en richting

Het verband tussen richting en teken is in Figuur 2.7-1 met opzet gebruikt. In elektrische schakelingen is het normaal. Het gaat dan om stroom die die ergens in- of uitloopt. Erin noemen we meestal positief, eruit negatief. Andersom mag ook, als je het maar consequent doet. In hoofdstuk 3 werken we dat uit als de wetten van Kirchhoff aan de orde komen.

2.7.4 Som en verschil

Als $a - b = c$, dan is c het *verschil* van a en b. Als $b - a = d$, dan heet d ook het verschil van a en b. Dus $c=-d$. Het is daarom oppassen geblazen bij gebruik van het woord *verschil* in verband met getallen of grootheden. Het zegt niets over welk van de twee het grootste of het kleinste is.

2.7.5 Grootheden optellen

Een laatste punt is de vraag: Kun je ongelijksoortige grootheden bij elkaar optellen? Het antwoord is nee. We zeggen wel eens dat je geen appels en peren kunt vergelijken, maar ze optellen lukt ook niet. Vijf appels en vier peren blijven vijf appels en vier peren. Ampères optellen bij kilogrammen of meters bij seconden of graden Celsius gaat evenmin.

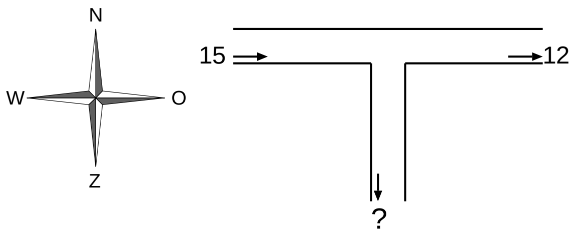
2.7.6 Samenvatting

- Een optelling is een opsomming van getallen of grootheden met hun teken
- Een aftreksom is een optelling met een negatief getal of negatieve grootheid.
- In een optelling zonder haakjes doet de volgorde van de getallen of grootheden er niet toe. Staan er wel haakjes in, zoals in a-(b+c), dan reken je eerst uit wat er tussen de haakjes staat.
- De uitkomst van een optelling heet de *som.*
- Min min (--) is plus, plus plus (++) ook. Min plus (-+)en plus min (+-) zijn allebei min. Twee gelijke tekens samen leveren dus altijd een plus, twee ongelijke een min.
- Je kunt alleen gelijksoortige grootheden bij elkaar optellen.

2.8 Opgaven

2.8.1 Opgave 2-6

Hieronder is een weg met T-kruising aangegeven. In 10 minuten tijd zijn er links van de kruising 15 voertuigen geteld die van west naar oost reden. Rechts van de kruising waren het er in diezelfde 10 minuten 12. Er waren geen voertuigen die van oost naar west reden en er is geen voertuig op de kruising blijven staan. Hoeveel voertuigen zijn in die 10 minuten rechtsaf geslagen?



Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

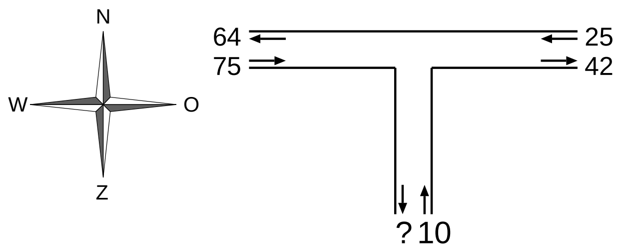
2.8.2 Opgave 2-7

Dezelfde berekening kun je ook doen met waterleidingbuizen, rivieren of stroomdraden. Lees de getallen in de figuur bij Opgave 2-6 bijvoorbeeld als liters per seconde. Hoeveel liter per seconde loopt er de leiding naar beneden in?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.8.3 Opgave 2-8

Het is niet erg waarschijnlijk dat op de west-oost route in Opgave 2-6 alle voertuigen dezelfde kant op rijden. Daarom doen we die opgave nog eens met tweerichtingsverkeer.



Aanwijzing: bereken per tak van de kruising eerst hoeveel verkeer er netto in of uit rijdt. Denk niet dat iets vergelijkbaars in elektrische schakelingen niet kan. Het kan, maar je meet per tak de netto stroom!

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

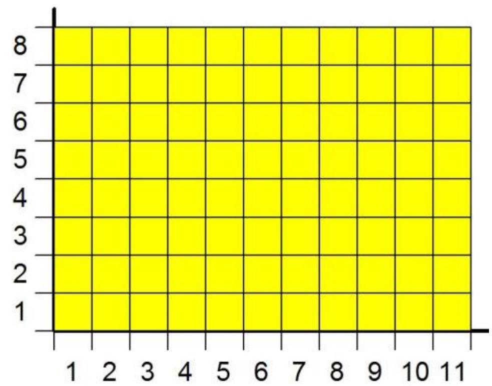
2.9 Vermenigvuldigen

2.9.1 Vermenigvuldigen van getallen

Je kunt een getal bij zichzelf optellen. Bijvoorbeeld 4 plus 4 is 8. Je kunt die bewerking ook 10 of 29 keer doen. Eén keer ‘4’ en 28 keer ‘+4’ opschrijven neemt nogal wat ruimte op papier of beeldscherm. Het neemt ook tijd en je moet letterlijk op je tellen passen. Daarom schrijven we de optelling als vermenigvuldiging: ‘29x4’, uitgesproken als ’29 maal 4’ of ’29 keer 4’. Dat is overzichtelijker.

Wie zich de lessen vermenigvuldigen van school herinnert of een zakrekenmachine bij de hand heeft, rekent snel uit dat de uitkomst 116 is. Als het alleen om getallen gaat, is een vermenigvuldiging dus niets anders dan het kort opschrijven van een lange optelling van steeds hetzelfde getal. In Figuur 2.7-1 telden we lengten op. Aan het eind hadden we nog steeds een lengte als uitkomst. Die was afgebeeld als een pijl.

2.9.2 Vermenigvuldigen van gelijksoortige grootheden



Figuur 2.9-1. Vermenigvuldiging van 8 en 11 lengte-eenheden.

Het vermenigvuldigen van grootheden gaat anders dan van getallen. Dat komt doordat een grootheid zelf een vermenigvuldiging is van een getal en een eenheid. Voorbeeld: 7 m betekent 7 maal de eenheid meter. Bij het vermenigvuldigen van grootheden vermenigvuldigen we niet alleen de getallen, maar ook de eenheden. Voorbeeld: 8 m maal 11 m. Dat zien we afgebeeld in Figuur 2.9-1. We zien 8 rijen van 11 vierkantjes (8x11), maar ook 11 kolommen van 8 vierkantjes (11x8). Beide benaderingen hebben evenveel vierkantjes als uitkomst. In een vermenigvuldiging doet de volgorde er dus niet toe, net als bij optellen. In een animatie is dit zichtbaar gemaakt voor 8 en 12 eenheden.

Laten we ervan uitgaan dat in Figuur 2.9-1 de lengte-eenheid de meter is. We hadden (8 m) x (11 m). De 8 en de 11 mogen we dus van plaats laten veranderen. Met de meters mag dat ook, maar de vierkantjes worden er niet anders van. Meters zijn meters. Dus mogen we ook (8 x 11)x(m x m) schrijven. Een lengte maal een lengte is een oppervlakte. De oppervlakte van elk vierkantje stelt één vierkante meter voor, die van de rechthoek is dus 88 vierkante meter. Meestal schrijven we die vierkante meter niet voluit, maar als m^2. Vermenigvuldigen van eenheden leidt dus tot een nieuwe eenheid. In dit geval worden twee lengte-eenheden na vermenigvuldiging een oppervlakte-eenheid. Zoals het vermenigvuldigen van twee eenheden leidt tot een nieuwe eenheid, leidt vermenigvuldigen van twee grootheden tot een nieuwe grootheid. In ons voorbeeld hebben we gelijksoortige grootheden gebruikt, dus met dezelfde eenheid. Voordat we ons met ongelijksoortige grootheden gaan bezighouden, is het goed, iets te zeggen over het vermenigvuldigteken.

2.9.3 Vermenigvuldigtekens

We hebben tot hiertoe het vermenigvuldigteken geschreven als ‘x’. Dat was vanouds gebruikelijk. Met de komst van de computer is dat veranderd. Als we een machine onderscheid moeten laten maken tussen de letter ‘x’ en de opdracht ‘x’ om een vermenigvuldiging uit te voeren, leidt dat tot problemen. In programmeertalen is daarom het teken * gebruikelijk geworden. Later is het ook in gedrukte tekst opgedoken. Dus bijvoorbeeld 11*8, om bij Figuur 2.9-1 te blijven.

In de wiskunde en de natuurkunde speelt het symbool *x* een andere rol dan die van vermenigvuldigteken x. Daarom wordt het daar in die wereld praktisch nooit voor gebruikt. Hoe verwarrend het gebruik van het ‘x’-teken is, wordt duidelijk als je de uitdrukking *a*x*b* bekijkt. De x staat rechtop en zal dus als vermenigvuldigteken zijn bedoeld. De symbolen *a* en *b* staan schuin (cursief) gedrukt en vertegenwoordigen dus een getal of grootheid. Maar zie je in één oogopslag het verschil met *axb*? Daarin is de *x* cursief gedrukt en is het dus een grootheid of variabele, net als *a* en *b*. Verwarrend.

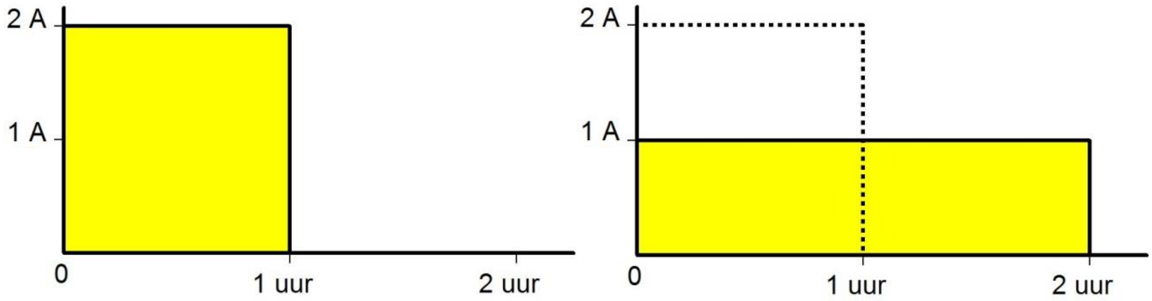
Tussen eenheden die met elkaar worden vermenigvuldigd, schrijven we soms een punt en meestal helemaal niets. Voorbeeld: de eenheid van elektrische lading, de Coulomb, is hetzelfde als de Ampèreseconde. Dat is Ampère maal seconde, soms geschreven als A.s en vaker als As. Bij symbolen voor een getal of grootheid schrijven we haast nooit een vermenigvuldigteken. Met 2*a* bedoelen we 2 maal *a*. 2.*a* gebruiken we haast nooit. Met *ab* bedoelen we *a* maal *b*. Zelfs *a.b* kom je weinig tegen. Het vermenigvuldigteken ‘x’ in combinatie met symbolen zullen we in deze cursus dan ook niet meer gebruiken.

De uitkomst van een vermenigvuldiging heet ook wel het *product*. Het product van *a* en *b* is *ab*.

2.9.4 Vermenigvuldigen van ongelijksoortige grootheden

Iedere vermenigvuldiging van twee grootheden kun je afbeelden op de manier van Figuur 2.9-1. Je zet dan de ene grootheid verticaal en de andere horizontaal. In Figuur 2.9-1 hadden we twee gelijksoortige grootheden (lengte), maar het kan ook met ongelijksoortige. Ook als een grootheid in werkelijkheid geen lengte is, kunnen we hem in een figuur of illustratie als lengte weergeven.

Laten we bijvoorbeeld eens naar de ontlading van een accu kijken (Figuur 2.9-2). De capaciteit ervan wordt meestal opgegeven in Ah, de afkorting van Ampèreuur. Oplettende lezers zullen nu aan de As uit 2.9.3 denken. Ook stroomsterkte maal tijd! Omdat er 3600 seconden in een uur gaan, is 1 Ah gelijk aan 3600 As, ofwel 3600 Coulomb = 3,6 kC. Zo reken je gelijksoortige eenheden in elkaar om. Een accucapaciteit opgeven in C is ongebruikelijk, maar natuurkundig gezien is er niets mis mee.



Figuur 2.9-2. Ontlading van een ideale accu van 2Ah met 2 A (links) en met 1 A (rechts). Beide gele oppervlakten hebben een ongelijke hoogte, maar zijn even groot.

Een volledig opgeladen accu van 2 Ah kan in theorie 1 uur lang een stroom van 2A leveren. Daarna is de inhoud op. Dat is weergegeven in de linkerhelft van Figuur 2.9-2. De oppervlakte van de gele rechthoek vertegenwoordigt de lading van de accu. De breedte vertegenwoordigt de tijd (één uur) en de hoogte de stroom (twee ampère). De oppervlakte stelt 2 Ah voor.

Als we de accu niet met 2, maar met 1 A ontladen, dan wordt de rechthoek half zo hoog. Om de oppervlakte van 2 Ah gelijk te houden, moet hij twee keer zo breed worden. Dat zien we in de rechterhelft van Figuur 2.9-2. De eerste rechthoek staat er gestippeld in. De accu levert bij een ontlaadstroom van 1 ampère twee uur stroom. In werkelijkheid is dat verband niet helemaal haarscherp. Dat komt doordat de capaciteit van een accu met toenemende ontlaadstroom iets afneemt.

2.9.5 Het teken van een product

We hebben het bij vermenigvuldigen nog niet gehad over het *teken* van het product. Plus (+) of min (-) dus. Min maal min is plus, dus (-2).(-2)=4, net als 2.2. En 2.(-2)=-4, net als (-2).2. Eén min geeft een negatief product, twee minnen een positief, drie minnen weer een negatief product, enzovoort. Algemeen gezegd: de uitkomst van een vermenigvuldiging is negatief als er een oneven aantal negatieve getallen of grootheden in staat. Als één van de waarden in de vermenigvuldiging 0 is, is de uitkomst ook 0. 0.2=0, 100.0=0, enzovoort.

2.9.6 Samenvatting:

- Bij een vermenigvuldiging mag elke volgorde van de te vermenigvuldigen getallen, eenheden of grootheden worden aangehouden. De uitkomst blijft dezelfde.
- Gelijksoortige en ongelijksoortige grootheden kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd. Het resultaat is in alle gevallen een nieuwe grootheid. De nieuwe grootheid wordt soms uitgedrukt in de oorspronkelijke eenheden en soms in een nieuwe eenheid. 10 A * 5 h wordt dus 50 Ah. Ah kun je ook in de SI-eenheid Coulomb schrijven. Dan moet het getal met 3600 worden vermenigvuldigd. Natuurkundig gezien is daar niets mis mee, maar gebruikelijk is het niet.
- De uitkomst van een vermenigvuldiging heet het *product*.
- Als in een vermenigvuldiging een getal 0 voorkomt, is het product ook 0.

- Een product is negatief als er een oneven aantal negatieve getallen of grootheden in de vermenigvuldiging staat, anders is het positief.

2.10 Opgaven

2.10.1 Opgave 2-9

Een veld is 1 km lang en 300 m breed. Hoeveel m^2 (vierkante meter) is dat?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.2 Opgave 2-10

Door een draad loopt een stroom van 1A. Dat is elke seconde 1 C. Hoeveel C is er in een minuut doorheen gelopen?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.3 Opgave 2-11

Een volgeladen accu blijkt 10 uur lang een stroom van 0,5 A te kunnen leveren. Hoe groot is de capaciteit van de accu?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.10.4 Opgave 2-12

Hoeveel is 0.37? En 2.(-3)? En (-2).(-3)?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.11 Delen en omgekeerde waarden

2.11.1 Delen en deeltekens

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen, net zoals aftrekken het omgekeerde is van optellen. Als vermenigvuldigen van een getal *a* met een getal *b* een getal *c* oplevert, dan levert delen van *c* door *b* weer het getal *a* op. Een cijfervoorbeeld: 7*3=21 en 21:3=7. Omdat bij een vermenigvuldiging de volgorde van vermenigvuldigen er niet toe doet, geldt ook 21:7=3, want 3*7=7*3=21.

Het deelteken is hier geschreven als ':'. Andere deeltekens dan ':' zijn:

- Een schuine streep, 21/3
- Een horizontale streep, $\frac{21}{3}$.
- '÷' , dus 21÷3. Deze komt weinig voor.

In de natuurkunde en de wiskunde zijn de schuine en vooral de horizontale streep het gebruikelijkst.

2.11.2 De deling als vermenigvuldiging

Net als tussen optellen en aftrekken is het verschil tussen vermenigvuldigen en delen maar betrekkelijk. Je kunt een deling veranderen in een vermenigvuldiging door te vermenigvuldigen met het omgekeerde van het getal of de grootheid waarmee je wilt delen. Wat is dat omgekeerde? Geen minteken deze keer. Het omgekeerde van een getal of grootheid *a* is 1/*a*. Het omgekeerde van 1/*a* is weer *a*. We gebruiken hier een letter, omdat je daarvoor alle waarden mag invullen. De letter staat cursief omdat hij een grootheid of een onbekend getal voorstelt. Dus:

$$\frac{21}{3} = 21.\frac{1}{3} \qquad (2.11\text{-}1)$$

Hiermee zijn we bij de breuken terechtgekomen, want $\frac{1}{3}$ is niet een geheel getal. Voor we daarmee aan de slag gaan, kijken we nog naar het op elkaar delen van grootheden. Eigenlijk doen de meesten van ons dat regelmatig, maar we zijn het ons niet altijd bewust. Snelheid bijvoorbeeld is lengte (afstand) gedeeld door tijd. De maximumsnelheid in de bebouwde kom is meestal 30 of 50 km per uur. Dat 'per' geeft een deling aan. We schrijven 'km per uur' meestal als km/h. Daar zit de deelstreep al in. Wie 100 km aflegt in 4 uur (4 h), heeft gemiddeld een snelheid van 100 km/4 h = 25 km/h gehad, want 4.25=100.

2.11.3 De volgorde in een deling

Bij een deling is de volgorde nu eens wel van belang: 100/4 is het omgekeerde van 4/100! De uitkomst van een deling heet het *quotiënt* (spreek uit: 'koosjent'). Net als bij de term *verschil* kan het *quotiënt* van twee getallen of grootheden twee waarden opleveren. Dat hangt af van hun volgorde in de deling. Zonder verdere informatie is *quotiënt* dus net als *verschil* een onduidelijke term.

2.11.4 Het teken van een quotiënt

De uitkomst van een deling is positief als beide getallen of grootheden positief of beide negatief zijn. Als één van beide negatief is, is de uitkomst ook negatief. Wordt 0 gedeeld door één of ander getal dat niet 0 is, dan is de uitkomst ook 0. Wordt een getal dat niet 0 is, gedeeld door 0, dan is de uitkomst oneindig. Wordt 0 gedeeld door 0, dan is de uitkomst onbepaald.

2.11.5 Samenvatting:

- Bij een deling mag je niet zomaar de volgorde veranderen
- Ongelijksoortige grootheden kunnen op elkaar worden gedeeld. Net als bij vermenigvuldigen is het resultaat een nieuwe grootheid.
- De uitkomst van een deling heet *quotiënt*. “Het quotiënt van a en b” kan zowel $\frac{a}{b}$ als $\frac{b}{a}$ betekenen. Het is met het gebruik van dit woord dus oppassen geblazen.
- De uitkomst van een deling is positief als beide getallen of grootheden hetzelfde teken hebben. Bij verschillend teken is de uitkomst negatief. Is het getal dat gedeeld wordt 0, dan is de uitkomst ook 0. Is het getal waardoor gedeeld wordt 0, dan is de uitkomst oneindig. Zijn ze beide 0, dan is de uitkomst onbepaald.

2.12 Opgaven

2.12.1 Opgave 2-13

Op een amateurbeurs worden zakjes met geheimzinnige onderdelen aangeboden voor 2 euro per stuk. De verkoper begon met een lege kas. Aan het eind van de beurs heeft hij 157 euro in kas. Uit de kas heeft hij in totaal 5 euro uitgegeven aan koffie en soft ice. Hoeveel zakjes onderdelen heeft hij verkocht?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.2 Opgave 2-14

Hoeveel is: 0/2, 2/0, 15/3, (-15)/3, 15/(-3) en (-15)/(-3)?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.3 Opgave 2-15

Een accu van 15 Ah wordt gebruikt om een lamp te voeden die 1A gebruikt. Hoe lang hoort de accu het vol te houden als die bij het begin volledig is opgeladen? En als de lamp 3A gebruikt? Ga uit van een accu waarbij de capaciteit niet afhangt van de geleverde stroomsterkte (dat is in werkelijkheid niet helemaal zo).

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.12.4 Opgave 2-16

Is er verschil in uitkomst tussen $a.(b/c).d$ en $(a.b).d/c$? En tussen $a.(b/c).d$ en $a/c.b.d$?

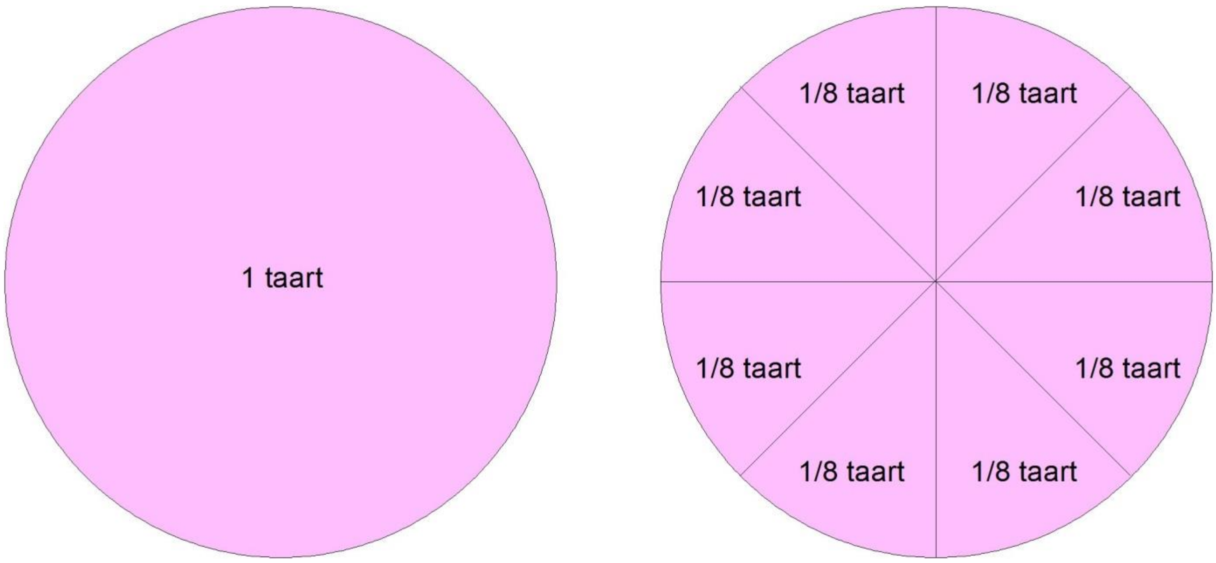
Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.13 Breuken

2.13.1 Wat is een breuk?

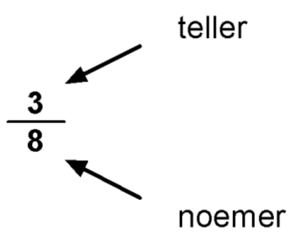
We verruilen het domein van de gehele getallen met dat van de gebroken getallen. De wiskundige spreekt over de *verzameling* van de gehele en de *verzameling* van de gebroken getallen. Samen zijn ze het domein of de verzameling van de *rationale* getallen. Letterlijk vertaald: te beredeneren getallen. Ter geruststelling: die woorden zijn geen examenstof.

Als je een taart in 8 even grote punten snijdt, is 1 taartpunt 1/8 (spreek uit: één achtste) deel van de taart (Figuur 4).



Figuur 2.13-1. Taart in bovenaanzicht. 1 taart = $\frac{8}{8}$ *taart.*

Twee punten is $\frac{2}{8}$ taart, 3 punten $\frac{3}{8}$, enzovoort. Een breuk ziet er dus uit als een deling. Dat is het ook. Als we 3 taarten verdelen onder 8 taarteters, heeft elk 3 punten is $\frac{3}{8}$ taart (en na het opeten misschien een onprettig gevoel in de maagstreek). We delen zo 3 door 8.



Figuur 2.13-2. Teller en noemer

Een breuk bestaat uit een waarde boven en onder de deelstreep. De waarde erboven heet de *teller*. Die telt het aantal delen. De waarde onder de deelstreep heet de *noemer* (Figuur 5). De noemer be*noemt* de soort van de delen.

Bij drie taarten, gelijk te verdelen onder 8 eters, geeft de teller het aantal taarten (3), de noemer het aantal eters (8).

2.13.2 Vereenvoudigen van breuken

Een breuk verandert niet van waarde als we teller en noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigen. Een voorbeeld: door de teller te vermenigvuldigen met 2 vermenigvuldigen we de uitkomst met 2. Door de noemer met 2 te vermenigvuldigen, delen we de uitkomst weer door 2. Resultaat: geen verandering. Teller en noemer door hetzelfde getal delen mag natuurlijk ook zonder dat de waarde van de breuk verandert.

$$\frac{3}{8} \text{ is gelijk aan } \frac{3.2}{8.2} = \frac{6}{16} \tag{2.13-1}$$

En

$$\frac{8}{8} = \frac{8/8}{8/8} = \frac{1}{1} = 1 \tag{2.13-2}$$

Deze truc is handig bij ingewikkelde breuken met vermenigvuldigingen of delingen in teller en/of noemer. Neem bijvoorbeeld

$$\frac{25.18.49}{35.15} \tag{2.13-3}$$

In teller en noemer van (2.13-3) zien we getallen die eindigen op 5. Elk getal dat eindigt op een 5 kun je door 5 delen zonder een rest over te houden. $\frac{35}{5} = 7$ en $\frac{25}{5} = 5$. We delen daarom teller en noemer door 5. We krijgen op die manier

$$\frac{25.18.49}{35.15} = \frac{5.18.49}{7.15} \tag{2.13-4}$$

We kunnen nog een keer delen door 5, want in de teller staat 5 en in de noemer 15. Dat levert

$$\frac{5.18.49}{7.15} = \frac{1.18.49}{7.3} \tag{2.13-5}$$

De 7 in de noemer en de 49 in de teller van de uitkomst in (2.13-5) zijn deelbaar door 7 (uitkomsten 1 en 7). De 3 in de noemer en de 18 in de teller zijn deelbaar door 3 (uitkomsten 1 en 6). Dan houden we over

$$\frac{1.18.49}{7.3} = \frac{6.7}{1.1} = \frac{42}{1} = 42 \tag{2.13-6}$$

Wat we in (2.13-3) tot en met (2.13-6) hebben gedaan, heet het *vereenvoudigen* van een breuk. Zo mooi als deze komt natuurlijk niet elke ingewikkelde breuk uit. De gebruikte truc staat ook bekend als 'tegen elkaar wegstrepen'. Als de teller, zoals hier, kan worden gedeeld door de noemer, is de uitkomst een geheel getal. Anders is het een *gebroken getal*.

2.13.3 Optellen van breuken

Optellen (en aftrekken, maar dat is hetzelfde, weten we sinds 2.7.1) van breuken is een lastig klusje als ze niet dezelfde noemer hebben. We kennen de uitdrukking *alles onder* *één noemer brengen*. Die handeling is nodig vóórdat breuken met verschillende noemer kunnen worden opgeteld. Een voorbeeld is de optelling

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \qquad (2.13\text{-}7)$$

We berekenen eerst het product van 2 en 3 om een getal te krijgen dat deelbaar is door zowel 2 als 3. $2.3 = 6$. We moeten nu zorgen dat er in de noemer van beide getallen 6 komt te staan. Dat gaat zo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1.2}{3.2}+\frac{1.3}{2.3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6} \qquad (2.13\text{-}8)$$

2.13.4 Vermenigvuldigen van breuken

Vermenigvuldigen van breuken is gemakkelijker. Je vermenigvuldigt zowel de tellers als de noemers met elkaar. Klaar is Kees! Voorbeeld:

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1.1}{3.2}=\frac{1}{6} \qquad (2.13\text{-}9)$$

Of met een ingebouwde vereenvoudiging (let op de 3 in teller en noemer):

$$\frac{2}{3}.\frac{3}{5}=\frac{2.3}{3.5}=\frac{2}{5} \qquad (2.13\text{-}10)$$

In (2.13-10) konden we de 3 in de teller en de 3 in de noemer tegen elkaar wegstrepen.

Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde, zoals we eerder zagen. Een voorbeeld:

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.\frac{2}{1}=\frac{2}{3} \qquad (2.13\text{-}11)$$

In woorden: delen door een half is vermenigvuldigen met twee. Het werken met breuken kan dus omslachtig zijn. Daarvoor heeft de mens een oplossing gevonden. Dat is de tiendelige breuk die ook wel *decimale breuk* heet. Het woord *decimaal* is afgeleid van het Latijnse woord voor tien, *decem*. Voordat de daarmee aan de slag gaan, eerst een samenvatting en een paar opgaven

2.13.5 Samenvatting:

- Een breuk is een deling waarin de teller wordt gedeeld door de noemer.
- De uitkomst van een breuk is een gebroken getal, behalve als de teller deelbaar is door de noemer.
- Optellen van breuken kan pas als je ze eerst *onder één noemer brengt*.
- Vermenigvuldigen van breuken doe je door teller met teller en noemer met noemer te vermenigvuldigen.
- Een getal delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde van die breuk

2.14 Opgaven

2.14.1 Opgave 2-17

Bereken:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}$$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.14.2 Opgave 2-18

Bereken:

$$5:\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6}\cdot\frac{12}{14}$$

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{26}{15}$$

$$\frac{5}{12}:\frac{5}{3}$$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.15 Tiendelige of decimale breuken

2.15.1 Opbouw van getallen

We kennen de opbouw van gehele getallen in het tientallige stelsel. Van rechts naar links (en dus niet van links naar rechts!) staan eerst de ééntallen (0-9), dan de tientallen, dan de honderdtallen, de duizendtallen, enz. Het getal 1307 is dus de som van 7 keer 1, 0 keer 10, 3 keer 100 en 1 keer 1000. Een geschreven getal is dus eigenlijk een optelling.

2.15.2 Consequent doorredeneren

Als we nu weer van links naar rechts kijken, worden de treden steeds 10x zo klein. Moeten we stoppen bij stappen van 1? Als we binnen de gehele getallen willen blijven, wel. Voor gebroken getallen gaan we gewoon door. Daar is rekenkundig gezien geen enkel bezwaar tegen. We redeneren dus van links naar rechts verder en gaan door met stapjes van

$$1.\frac{1}{10}=\frac{1}{10} \qquad (2.15\text{-}1)$$

gevolgd door

$$\frac{1}{10}.\frac{1}{10}=\frac{1}{100} \qquad (2.15\text{-}2)$$

gevolgd door

$$\frac{1}{100}.\frac{1}{10}=\frac{1}{1000} \qquad (2.15\text{-}3)$$

en zo verder. Tienden, honderdsten en duizendsten dus. Zo kunnen we in theorie oneindig lang doorgaan. Met een oneindig lange reeks kun je ieder niet-geheel getal weergeven. In de praktijk is dat niet te doen en behelpen we ons met een benadering die bestaat uit een eindig aantal cijferposities.

2.15.3 De komma

Er zit één lastig puntje in dit verhaal. Bij een geheel getal geeft het meest rechtse cijfer altijd het aantal stapjes van 1 aan. Daarmee weten we van alle cijfers in het getal waarvoor ze staan. Als we naar believen kleinere stapjes mogen toevoegen, is die zekerheid weg. Er is dus een baken nodig zodat we kunnen zien wat waar staat. Dat baken is de komma. Op je rekenmachine is het misschien de decimale punt, want die wordt vooral in veel Engelstalige landen gebruikt in plaats van onze komma. In Europa is de komma de norm. Die komt tussen de stappen van 1 en die van $\frac{1}{10}$. Het getal 2,1 is dus 2 plus $\frac{1}{10}$.

Vóór de komma (links dus) staat het deel dat hele stappen voorstelt, erachter (rechts) het gebroken deel. Het geheel heet een *tiendelige* of *decimale breuk*. De prijs van een artikel in een winkel is bijvoorbeeld € 15,48. Met Euro’s gaan we tot twee cijfers achter de komma.

In de natuurkunde en de wiskunde kunnen er (veel) meer cijfers achter de komma staan. Deel 1 door 3 op je zakrekenmachine en je krijgt een getal 0,333333333 als je display 10 cijfers aankan. In werkelijkheid hoort achter de komma een oneindig aantal keren het cijfer 3. Die kun je in de werkelijke wereld met een decimale breuk niet exact weergeven. Dat geldt voor verreweg de meeste breuken. Maar deel 1 door 4 en je vindt 0,25. Met sommige breuken gaat het dus wel.

2.15.4 Meetnauwkeurigheid en afronden

In de praktische natuurkunde heeft het zelden zin om voor een getal heel veel cijfers te gebruiken. Meestal is een benadering voldoende. Stel bijvoorbeeld dat je een elektrische spanning in Volts meet. Je afleesnauwkeurigheid is vaak niet beter dan drie cijfers. Laten we zeggen dat je 3,78 V op je instrument afleest. Dan het zinloos om de uitkomst van een berekening`, waarin dat meetresultaat verwerkt zit, in 10 cijfers op te schrijven. Daarop zijn twee uitzonderingen:

- Als het om nullen gaat rechts van de komma tot het eerste cijfer dat niet nul is, bijvoorbeeld 0,000756.
- Als het om nullen gaat tussen het meest rechtse cijfer en de positie van de komma, bijvoorbeeld 756 000.

Als het om een grootheid gaat, hebben we de voorvoegsels voor eenheden in Tabel 2.4-2 bij de hand om die nullen allemaal of voor het grootste deel weg te werken.

Drie voorbeelden:

- De berekeningsuitkomst voor een schakeling met de 3,78 V is 7,38654 Ampère. Dat is een schijnnauwkeurigheid, want zo nauwkeurig was onze voltmeting niet. Er waren maar drie cijfers. We ronden de uitkomst van de berekening daarom ook af op een waarde met 3 cijfers. Dat wordt 7,39 A, het getal van 3 cijfers dat het dichtst bij de berekende uitkomst ligt. Dat zul je meestal zelf moeten doen. Zakrekenmachines zijn daarvoor bijna altijd te dom.
- De berekeningsuitkomst is 0,00738654 Ampère. Moeten we nu afronden op 0,007 A? Het antwoord is nee, want de eerste nullen geven alleen maar aan dat het hier om duizendsten gaat. Het resultaat wordt dus 0,00739 Ampère, maar met Tabel 2.4-2 in gedachten liever 7,39 mA.
- De berekeningsuitkomst is 7386,64 A. Ook dat probleem is op te lossen met nullen. In dit geval maar één: 7390 Ampère, of 7,39 kA. Dat is voor een elektronische schakeling heel veel. Bij zo'n uitkomst zou je ook je berekening even moeten controleren.

Nog één afrondingsregeltje: stel dat de uitkomst 7,39654 is. Dat rond je af op 7,40. In dit geval laat je de 0 achter de 4 staan, omdat je daarmee de nauwkeurigheid van het resultaat aangeeft. Dus niet 7,4! We noemen de afronding op 7,40 ook wel *afronding op drie significante cijfers*, of in behoorlijk Nederlands: op *drie betekenisvolle cijfers*. Daar moet je geen twee van maken. Rekenkundig geldt natuurlijk 7,40=7,4. Maar als het om (on)nauwkeurigheid gaat, geven beide uitkomsten niet precies hetzelfde aan. 7,4 suggereert dat het getal op twee betekenisvolle cijfers nauwkeurig is bepaald, 7,40 op drie.

2.15.5 Percentages

Procent of percent, geschreven als %, betekent letterlijk 'per honderd'. Onder het kopje Delen en omgekeerde waarden hebben we gezien dat het woordje 'per' een deling betekent. 15% betekent dus 15 per 100, 15 honderdsten of gewoon 0,15.

Gedeeld door 100 is hetzelfde als 'maal $\frac{1}{100}$' of 'maal 0,01'. 2% betekent dus 'maal $\frac{2}{100}$' of 'maal 0,02'. 10% korting betekent dat je van een aangegeven prijs van elke euro 10 cent niet betaalt en 90 cent wel. Een rendement van 30% bij een zender betekent dat van elke aan het apparaat toegevoerde Watt (W) maar $\frac{30}{100}\mathrm{W} = \frac{3}{10}\mathrm{W}$ naar de antenne gaat. De rest, 0,7 W, gaat op aan warmte. Over dat laatste zullen we het tegen het eind in dit hoofdstuk nog hebben.

2.15.6 Samenvatting:

- Een tiendelige of decimale breuk is een gebroken getal. We kunnen elk gebroken getal schrijven als tiendelige breuk.
- Een tiendelige breuk zit net zo in elkaar als een geheel getal. Van rechts naar links de eenheden, tientallen, honderdtallen, enz. Rechts daarvan tienden, honderdsten, duizendsten, enzovoort. De komma is de scheiding tussen eenheden en tienden.
- Een tiendelige breuk is meestal een oneindig lange reeks cijfers, maar soms geeft een eindig aantal cijfers een exacte waarde.
- Een tiendelige breuk wordt in de praktijk uitgeschreven in het aantal betekenisvolle of significante cijfers. Bij metingen gebeurt dat standaard. Meer cijfers gebruiken is dan zinloos.
- Een percentage is het aantal honderdsten van iets. 11% van x is hetzelfde als 11/100 van x.

2.16 Opgaven

2.16.1 Opgave 2-19

Schrijf als decimale breuk met hoogstens 6 cijfers achter de komma): 17 397/10,

17 397/100, 17 397/1000, 25/1000, 50/4, 25/11, 25/3, 25/7.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.16.2 Opgave 2-20

Een meetuitkomst is 4,23 eenheden. Er wordt een berekening mee gedaan op een zakrekenmachine die de uitkomst 6,761347890 geeft. Welke cijfers zijn hier betekenisloos en waarop rond je de uitkomst op een zinvolle manier af?
Doe hetzelfde voor een uitkomst 6,76561399; voor een uitkomst 6,76497865 en voor een uitkomst 7,79718223.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.16.3 Opgave 2-21

Een radio-ontvanger wordt verkocht voor € 800. Een maand later is hij in de aanbieding voor € 720. Hoeveel korting in % van de oorspronkelijke prijs is dat? Een hoe groot is de korting als de prijs in de aanbieding € 600 zou zijn?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.16.4 Opgave 2-22

Een zender neemt bij zenden 300 Watt op uit het lichtnet. De antenne krijgt 100 Watt toegevoerd. Bereken het rendement in % van de opname uit het lichtnet.

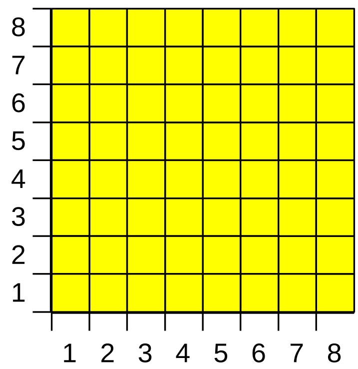
Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.17 Kwadraten, machten en exponenten

2.17.1 Kwadraten

In 2.9.1 hebben we gezien dat je een vermenigvuldiging van getallen kunt voorstellen als het bij zichzelf optellen van een getal. Dat kan een onbeperkt aantal keren. We kunnen dat kunstje herhalen met vermenigvuldigen. Een getal een aantal keren met zichzelf vermenigvuldigen dus.

Een getal maal zichzelf heet een *kwadraat*. Kwadraat betekent letterlijk 'vierkant'. Een vierkant is een rechthoek waarvan alle zijden dezelfde lengte hebben. Voor het berekenen van de oppervlakte van een vierkant maakt het niet uit of je lengte en hoogte vermenigvuldigt of dat je lengte*lengte of hoogte*hoogte neemt. Zie Figuur 2.17-1. Daarin staat een vierkant van 8 lengte-eenheden hoog en 8 lengte-eenheden breed. Laten we er voor het gemak van uitgaan dat het om meters gaat. De figuur is dus verkleind weergegeven. De oppervlakte is dan 8m.8m. Dat is hetzelfde als 8.8.m.m.



Figuur 2.17-1. Vierkant met zijden van 8 eenheden.

8.8 schrijven we ook als 8^2. Uitgesproken als 'acht kwadraat', maar ook 'acht tot de macht twee', 'acht tot de tweede macht'', of korter: 'acht tot de tweede'. Zo wordt m.m natuurlijk m^2. Dit verklaart de kleine 2 rechtsboven de m, het symbool voor de eenheid m (meter). Het is de standaard-schrijfwijze van de SI-oppervlakte-eenheid *vierkante meter*. '*Meter kwadraat'* zeggen we niet vaak, maar er is niets mis mee. In Figuur 2.17-1 staat 64 m^2 verkleind afgebeeld als 64 vierkantjes die 1 m^2 voorstellen. In 2.9.2 en 2.9.4 hebben we gezien dat vermenigvuldigen van eenheden een nieuwe eenheid oplevert. In dit geval levert een lengte-eenheid, met zichzelf vermenigvuldigd, een oppervlakte-eenheid. Dat zagen we al in 2.9.2.

Is nu de linkerhelft van Figuur 2.9-2, waarin de accu van 2Ah in 2 uur werd ontladen een vierkant in de natuurkundige betekenis? Het antwoord is nee. Op de ene zijde staan namelijk Ampères, op de andere uren. De Ampèreuur (Ah) is een vermenigvuldiging van twee verschillende eenheden en dus geen kwadraat. Vierkante meters zijn dat wel.

2.17.2 Exponenten: van vermenigvuldiging naar optelling

Het woord 'macht' is bij de kwadraten al gevallen. Als a^2 hetzelfde is als *a.a*, is er alle reden om *a.a.a* te schrijven als a^3, *a.a.a.a* als a^4, enzovoort. In Tabel 2.4-2 hebben we al kennis gemaakt met de exponent. Hier komt hij terug als het kleine getalletje rechts boven de *a*. We gaan er nu wat verder op in.

De exponent geeft aan hoe vaak een getal met zichzelf wordt vermenigvuldigd. Bij a^4 spreken we over '*a* tot de macht vier', '*a* tot de vierde macht' of kortweg 'a tot de vierde'. Bekijk nu eens de vermenigvuldiging van a^2 en a^3, dus twee verschillende machten van *a*.

$$a^2.a^3 = (a.a).(a.a.a) = a^5 \qquad (2.17\text{-}1)$$

De haakjes zijn hier gebruikt om de beide onderdelen van de vermenigvuldiging goed te laten uitkomen. Omdat de volgorde in een vermenigvuldiging niets uitmaakt, hebben de haakjes geen invloed op de uitkomst. We zien dat we de exponenten bij elkaar kunnen optellen. Vermenigvuldigen van machten van eenzelfde getal betekent dus niet meer dan exponenten optellen.

2.17.3 Negatieve exponenten

De vermenigvuldiging

$$a.a^4 \qquad (2.17\text{-}2)$$

levert

$$a.a.a.a.a = a^5 \qquad (2.17\text{-}3)$$

Dan is a dus hetzelfde als a^1, want 1+4=5.

Als we a^5 weer delen door a, dan moeten we a^4 als uitkomst krijgen. Delen door a is vermeningvuldigen met $\frac{1}{a}$. Dan krijgen we dus

$$a^5.\frac{1}{a} = a^4 \qquad (2.17\text{-}4)$$

De exponent die de waarde 5 had, wordt door deze bewerking 4. Er gaat dus 1 vanaf of anders gezegd, er komt -1 bij. We mogen dus voor $\frac{1}{a}$ ook a^{-1} schrijven:

$$a^5.\frac{1}{a} = a^4 = a^5.a^{-1} \qquad (2.17\text{-}5)$$

De omgekeerde waarde van a^2 is

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2} \qquad (2.17\text{-}6)$$

We laten dit in getalvorm zien met het getal 3 en de exponenten 4 en -1.

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81 \qquad (2.17\text{-}7)$$

En

$$\frac{81}{3} = 27 \qquad (2.17\text{-}8)$$

En dan

$$\frac{81}{3} = 3^4.3^{-1} = 3^3 = 3.3.3 = 27 \qquad (2.17\text{-}9)$$

Twee keer dezelfde uitkomst (zoals het hoort). Probeer het als je wilt ook met het getal 2.

2.17.4 Een exponent van niets

Als een exponent zowel positief als negatief kan zijn, zou hij dan ook 0 kunnen zijn? En als het antwoord 'ja' is, wat moeten we ons er dan bij voorstellen?

Bekijk voor het antwoord de vermenigvuldiging

$$a^n . a^{-n} = a^{n-n} = a^0 \quad (2.17\text{-}10)$$

Anders geschreven staat hier: a^n gedeeld door a^n. Een waarde die je door zichzelf deelt, levert altijd 1 op. Drie taarten voor drie personen is 1 taart per persoon. Dus geldt voor ieder getal of grootheid *a*:

$$a^0 = 1 \quad (2.17\text{-}11)$$

Merk op dat met een exponent 0 een grootheid verwordt tot een getal, want een eenheid gedeeld door zichzelf levert ook het getal 1.

2.17.5 Een exponent is nooit een grootheid, altijd een getal

Kan een exponent ook een grootheid zijn? Een exponent is het aantal keren dat een getal met zichzelf wordt vermenigvuldigd. Met exponenten van nul en negatieve exponenten vatten we dat ruim op, maar een aantal keren is en blijft een getal. Een exponent is daarom altijd een getal en kan nooit een grootheid zijn.

Wel is de uitkomst van een machtsverheffing van een grootheid weer een grootheid. Als de macht 1 is, blijft de grootheid dezelfde. In alle andere gevallen niet. Met een exponent van 0 wordt elke grootheid een getal, namelijk 1. Een lengte tot de macht 3 wordt een kubus, dus een volume. Kubieke meter schrijf je dan ook als m^3.

2.17.6 Samenvatting

- Exponenten kunnen positief, negatief of 0 zijn
- Een waarde met een negatieve exponent geeft het omgekeerde van diezelfde waarde met eenzelfde, maar positieve exponent.
- Een exponent van 0 levert altijd het getal 1 als uitkomst.
- Een exponent is altijd een getal, nooit een grootheid.
- Een macht van een grootheid levert een nieuwe grootheid op. Er zijn twee uitzonderingen. Uitzondering 1: is de exponent 1, dan blijft de grootheid onveranderd. Uitzondering 2: is de exponent 0, dan is de uitkomst het getal 1.
- Vermenigvuldigen van machten van eenzelfde getal komt neer op het optellen van de exponenten.

2.18 Opgave

2.18.1 Opgave 2-23

Hoeveel is: x^0 ; 3^2 ; 3^3 ; $2^4.2^{-2}$; $3^5.3^{-4}$; 2^{-2}

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.19 Wortels

2.19.1 Een wortel is het omgekeerde van een macht en zelden een geheel getal

Een wortel is het omgekeerde van een macht. Kijk nog eens naar het vierkant in Figuur 2.17-1. De oppervlakte ervan bedraagt 8^2 m^2 = 64 m^2. De lengte van één zijde van het vierkant is 8 m, de wortel uit 64 m^2. Aan de eenheden gaan we nu even voorbij en kijken alleen naar de getallen. We schrijven dan

$$\sqrt{64} = 8$$

uitgesproken als 'de wortel uit 64 is 8' of korter 'wortel 64 is 8'. Het teken √ links van het getal 64 noemen we het 'wortelteken'. Omgekeerd geldt:

$$8^2 = 64$$

Lang niet elk geheel getal heeft, zoals 64, een geheel getal als wortel. Een getal met een geheel getal als wortel is het kwadraat van laatstgenoemd geheel getal. Voorbeelden: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$, enzovoort. Getallen met gehele wortels zijn dus 1, 4, 9, 16, 25, 36, enz.

Je zou je kunnen afvragen of wortels van tussenliggende getallen dan wel bestaan. Dat doen ze. Het zijn alleen geen gehele getallen. Voorbeeld: $\sqrt{2}$ is afgerond 1,414214. Probeer 1,414214 maar op je zakrekenmachine te kwadrateren of met zichzelf te vermenigvuldigen, dan kom je op een ietsje meer dan 2 uit. De tiendelige breuk als uitkomst van $\sqrt{2}$ is achter de komma oneindig lang. Voor de praktijk volstaan meestal één of enkele cijfers achter de komma. Getallen die je als oneindige decimale breuk, maar niet als gewone breuk kunt schrijven, heten in de wiskunde *irrationale* getallen, letterlijk vertaald: niet te beredeneren. Dit laatste is geen examenstof. Meer erover vind je op https://nl.wikipedia.org/wiki/Irrationaal_getal. We zullen verderop in dit hoofdstuk nog twee beroemde irrationale getallen tegenkomen.

2.19.2 De wortel als macht

We konden een aftreksom neerzetten als een optelling met een negatief getal, zagen we in 2.7.1. In 2.11.2 bleek een deling hetzelfde te zijn als een vermenigvuldiging, maar dan met de omgekeerde waarde. Zouden we ook een wortel kunnen schrijven als een macht?

We gaan het zien met een willekeurig positief getal *a*. We zoeken een macht van *a* die *a* oplevert als die macht van *a* met zichzelf wordt vermenigvuldigd. In 2.17.2 zagen we dat vermenigvuldigen van machten van eenzelfde getal optellen van exponenten betekent. De som van de exponenten moet nu het getal 1 opleveren, want

$$a = a^1 \qquad (2.19\text{-}1)$$

De exponenten moeten ook gelijk aan elkaar zijn, want we vermenigvuldigen een getal met zichzelf, dus twee gelijke getallen. De exponent met waarde 1 moet dus in twee gelijke delen worden verdeeld. Dan zoeken we de helft van 1 en dat is $\frac{1}{2}$. Dus geldt

$$\sqrt{a} = a^{1/2} \qquad (2.19\text{-}2)$$

Deze uitkomst vertelt ons niet alleen dat een wortel inderdaad een macht is, maar ook dat er niet alleen hele, maar ook gebroken exponenten bestaan. Daarmee gaan we straks verder. Eerst iets meer over wortels.

2.19.3 Soorten wortels

De term 'wortel' is eigenlijk niet compleet. Strikt genomen moeten we 'vierkantswortel' zeggen, want $\sqrt{a}$ is de waarde waarvan *a* het kwadraat is en kwadraat betekent vierkant. 'Tweedemachtswortel' mag ook, want een kwadraat is een tweede macht. Die toevoegingen zouden overbodig zijn als er geen andere wortels zouden bestaan, maar die zijn er wel. Als bijvoorbeeld

$$a = b^3 \qquad (2.19\text{-}3)$$

dan is *b* de derdemachtswortel van *a*. Dat laatste schrijven we als

$$\sqrt[3]{a} = b$$

De 3 in (2.19-3) is een toevoeging die vertelt om wat voor soort wortel het gaat. Het wortelteken zonder toevoeging betekent altijd de tweedemachts- of vierkantswortel.

Het berekenen van een wortel heet *worteltrekken*. Het trekken van wortels is dus niet alleen een agrarische bezigheid. De bok uit Siddeburen kon er ook wat van. In Siddeburen heeft hij zelfs een standbeeld. Zie het gedicht van Kees Stip (Trijntje Fop) op http://www.gedichten.nl/nedermap/gedichten/gedicht/194384.html.

Ook een derdemachtswortel kun je schrijven als macht. Hoe dat moet, is voor de oplettende lezer nu niet meer zo moeilijk te bedenken:

$$\sqrt[3]{a} = a^{1/3} \qquad (2.19\text{-}4)$$

Want

$$a^{1/3}.\,a^{1/3}.\,a^{1/3} = a^{3/3} = a^1 = a \qquad (2.19\text{-}5)$$

De exponent mag ook de vorm van een decimale breuk hebben, dus

$$\sqrt[3]{a} = a^{0,33333} \qquad (2.19\text{-}6)$$

Eigenlijk klopt dit niet helemaal, omdat er een oneindig aantal cijfers 3 achter de komma moet staan. De 0,33333 vertegenwoordigt een zogenoemde repeterende (zich herhalende) breuk. Als we alles heel strikt nemen, moeten we

$$\sqrt[3]{a} \approx a^{0,33333} \qquad (2.19\text{-}7)$$

schrijven. Het kronkelige is-gelijk-teken betekent: ‘is ongeveer gelijk aan’. In de praktijk hoeven we ons daar bijna nooit iets van aan te trekken. Een exameneis is het ook niet.

2.19.4 Nog meer machten

Nu we hebben gezien dat een wortel ook een macht is, kunnen we ons begrip van machten nog wat verder uitbreiden.

Hoe zit het bijvoorbeeld met een macht met een gebroken exponent die je niet als gewone breuk kunt schrijven? Zulke getallen bestaan. Ze leveren een uitkomst. Sterker nog, je kunt elk positief getal schrijven als een –meestal gebroken- macht van een ander getal. Daarover zullen we het verderop bij de logaritmen wat uitvoeriger hebben.

Met negatieve getallen kan dat meestal niet. Het kwadraat van een negatief getal is een positief getal. Daar begint het probleem al. Een voorbeeld voor het getal -2:

$$(-2)^2 = (-2).(-2) = 4 \qquad (2.19\text{-}8)$$

De haakjes geven aan dat het minteken alleen bij de 2 hoort. Een negatief getal met een even exponent geeft altijd een positieve uitkomst. Je zou dus kunnen zeggen dat $\sqrt{4} = 2$ en $\sqrt{4} = -2$ allebei goed zijn. In de toegepaste wiskunde, waarmee we als elektronici te maken hebben, houden we niet van twee mogelijke uitkomsten tegelijkertijd. We schrijven daarom -$\sqrt{4}$=-2. Dat is een afspraak, geen wiskundige noodzaak.

Het product van een positief en een negatief getal is negatief. Bekijk

$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8 \qquad (2.19\text{-}9)$$

Een negatief getal met een gehele oneven exponent geeft altijd een negatieve uitkomst. Dus

$$\sqrt[3]{-8} = -8^{1/3} = -2 \qquad (2.19\text{-}10)$$

Het assortiment aan machten van negatieve getallen is beperkt tot

- exponenten met hele getallen
- exponenten met gebroken getallen die een oneven noemer hebben, zoals $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, enzovoort.

Maar hoe zit het dan met alle andere gebroken machten van negatieve getallen? Neem bijvoorbeeld $\sqrt{(-2)}$. Een kwadraat kan nooit negatief worden, hebben we gezien. Die wortel bestaat dus niet in de reële wereld. In de wiskunde hoort de uitkomst bij de *imaginaire getallen*. Imaginair betekent denkbeeldig. Je kunt er ondanks die denkbeeldigheid heel veel mee, óók in de elektronica. Maar hier gaan we er niet verder op in. Geïnteresseerden kunnen bv. op https://nl.wikipedia.org/wiki/Imaginair_getal of https://nl.wikipedia.org/wiki/Complex_getal meer informatie vinden.

2.19.5 Samenvatting

- Een wortel is het omgekeerde van een macht.
- Elke wortel kan worden geschreven als een macht met een breuk als exponent. Algemeen geschreven: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.
- De omgekeerde waarde van een macht van een getal of grootheid *a* is *a* tot diezelfde macht, maar met tegengesteld teken. Het omgekeerde van a^n is dus a^{-n}.
- Elk positief getal is te schrijven als een macht van een ander positief getal
- Machten van negatieve getallen met een gehele exponent bestaan. Even exponenten geven een positieve uitkomst, oneven exponenten een negatieve.
- Gebroken machten van negatieve getallen bestaan alleen als de exponent een oneven geheel getal in de noemer heeft, dus $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, enzovoort. De uitkomst is dan een negatief getal.

2.20 Opgave

2.20.1 Opgave 2-24

Schrijf als macht: $\sqrt{10}$; $\sqrt[2]{10}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[3]{a}$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.21 Voorrangsregels en de pensionering van mijnheer van Dale

2.21.1 Gemengde berekeningen

Het kan gebeuren dat we een gemengde berekening op ons bordje krijgen. Bijvoorbeeld één met optellen en vermenigvuldigen of een vermenigvuldiging met een macht erin. Soms spreekt de volgorde van werken vanzelf, maar niet altijd. Dan moeten we weten wat eerst moet en wat laatst. Anders kunnen we verschillende en vooral onbedoelde uitkomsten krijgen. Net als in het verkeer zijn er voorrangsregels.

2.21.2 Rangorde van bewerkingen

De oplettende lezer zal hebben gemerkt dat er een rangorde zit in het rijtje optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen. Vermenigvuldigen met een getal *n* is *n* stuks van hetzelfde getal of dezelfde grootheid optellen. Over de iets ingewikkelder vorm van vermenigvuldigen met een grootheid hebben we het nu even niet. Machtsverheffen tot een macht *n* is *n* stuks van hetzelfde getal of dezelfde grootheid vermenigvuldigen. We hebben zo optellen aan de basis, machtsverheffen aan de top en vermenigvuldigen er tussenin (Tabel 2.21-1).

Tabel 2.21-1. Rangorde van optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen

	Machtsverheffen	
Getal met zichzelf vermenigvuldigen	⇑	*een geheel of gebroken aantal keren*
	Vermenigvuldigen	
Getal bij zichzelf optellen	⇑	*een geheel of gebroken aantal keren*
	Optellen	

Van die rangorde gaan we uit. Over aftrekken, delen en wortels hebben we het niet, want dat is niet nodig. Aftrekken is optellen van een negatief getal. Delen is vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde. Een *n-de* machtswortel is een macht met de omgekeerde waarde van n als exponent. Maar bedenk dat alles wat tussen haakjes staat, zonder uitzondering eerst aan bod komt. Daarmee hebben we de rekenregels vastliggen.

2.21.3 Rekenregels

Regel 1. Wat tussen haakjes staat, gaat altijd voor.

Regel 2. Machtsverheffen gaat vóór vermenigvuldigen en vermenigvuldigen gaat vóór optellen. Daar hebben we dus onze rangorde weer in beeld. In $a + bc^d$ bereken je eerst c^d, dan vermenigvuldig je de uitkomst met b en telt dan pas a erbij op.

Wat verder aan regels volgt, is uitwerking van regel 1 en regel 2.

Regel 3. Optellen/aftrekken, zoals $a+b+c-d+f$ mag in willekeurige volgorde, maar gaat het zekerst in de volgorde zoals het er staat. Dan is de kans op vergissingen het kleinst.

Regel 4. In een deling bereken je teller en noemer eerst. Pas daarna voer je de deling uit. Voorbeeld: in

$$\frac{a + b + c}{xy} \tag{2.21-1}$$

bereken je eerst $a+b+c$ en xy, daarna deel je pas. Je leest het dus als

$$\frac{(a + b + c)}{(xy)} \tag{2.21-2}$$

De lange deelstreep heeft voor teller en noemer dezelfde betekenis als haakjes. Wat erboven en eronder staat, bereken je eerst. Daarna komt pas de deling. Je mag de lange deelstreep dus zien als een verborgen stel haakjes voor teller èn noemer

Regel 5. Vermenigvuldigen, zoals $a.b.c$ mag in elke volgorde. Pas op als er een deling in zit. Zet die aan het eind, bijvoorbeeld $a.b.c/d$. Nog beter: schrijf

$$\frac{abc}{d} \tag{2.21-3}$$

Dan is er geen misverstand mogelijk. Zie regel 4.

Regel 6. Bereken bij machten eerst de exponent. Voorbeeld: bij

$$x^{a+b} \qquad (2.21\text{-}4)$$

reken je eerst $a+b$ uit. Eigenlijk moet je het lezen als

$$x^{(a+b)} \qquad (2.21\text{-}5)$$

Weer verborgen haakjes dus. Je ziet het doordat de b in de exponent op dezelfde hoogte staat als het plusteken en a.

$$x^{a+b} \qquad (2.21\text{-}6)$$

is dus niet hetzelfde als

$$x^a + b \qquad (2.21\text{-}7)$$

want dan tel je b op bij x^a.

Regel 7. Bij wortels komt wat 'onder' het wortelteken staat, eerst. Voorbeeld: bij

$$\sqrt{ab} \qquad (2.21\text{-}8)$$

eerst ab uitrekenen, dan pas de wortel. Ook hier vervangt de lange horizontale streep aan het wortelteken dus een stel haakjes. Alweer verborgen haakjes!

$$\sqrt{ab} \qquad (2.21\text{-}9)$$

is dus hetzelfde als

$$\surd(ab). \qquad (2.21\text{-}10)$$

Verwar dat niet met

$$\sqrt{a}.b \qquad (2.21\text{-}11)$$

want dan staat b niet meer onder de horizontale streep. Schrijf in zo'n geval $b\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt{a}.b$. Je krijgt dan geen misverstanden. Het is in de praktijk regel om het zo te doen.

Sommige lezers zullen op de basis- of lagere school het ezelsbruggetje *Mijnheer Van Dale Wacht Op Antwoord* hebben geleerd. Dat staat voor de volgorde **m**achtsverheffen, **v**ermenigvuldigen, **d**elen, **w**orteltrekken, **o**ptellen en **a**ftrekken. Stuur deze mijnheer per direct met pensioen en vergeet hem zo snel mogelijk. Houd je vooral aan regel 1 en 2. De rest volgt vanzelf.

2.21.4 Samenvatting

- Wat tussen haakjes staat gaat altijd voor

- Verborgen haakjes zijn in willekeurige volgorde: een lange deelstreep, de horizontale streep aan een wortelteken of een exponent met daarin een optelling, vermenigvuldiging of wat voor bewerking ook
- Voor het overige geldt de rangorde: (1) macht, (2) vermenigvuldigen, (3) optellen.

2.22 Opgaven

2.22.1 Opgave 2-25

Bereken 7+5-8*2+4 en 7+5-8*(2+3)

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.22.2 Opgave 2-26

Bereken 2^2+3-6 en 2^{2+3}-6

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.22.3 Opgave 2-27

Bereken 5.6/3.5 en 5.6/(3.5)

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.23 Machten van 10, logaritmen en de decibel

2.23.1 Machten van 10

Heel grote of heel kleine getallen met maar enkele betekenisvolle cijfers kun je natuurlijk met alle bijbehorende nullen uitschrijven. Dat is lastig met schrijven èn met lezen. Je kunt ze ook als kort getal met het zinvolle aantal cijfers maal een macht van 10 schrijven. Gebruikelijk, maar niet verplicht, is één getal voor de komma, de rest erachter, maal 10 tot een of andere gehele macht. Een paar voorbeelden ter verduidelijking:

1 miljoen (1 000 000) is 10^6

1 miljard (1 000 000 000) is 10^9

0,000 003 24 is $3{,}24.10^{-6}$.

De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 000 000 km. Dat kun je schrijven als $1{,}5.10^8$ km.

De snelheid van radiogolven (en van licht) is afgerond $3{,}00.10^8 \mathrm{m/s}$. Met een voorvoegsel uit Tabel 2.4-2 wordt dat 300 Mm/s. Vreemd genoeg doet bijna niemand dat. Meestal gaat deze grootheid in km/s, dus wordt het $3{,}00.10^5 \mathrm{km/s}$ of 300 000 km/s.

In hoofdstuk 3 komt elektrische stroom aan de orde. De eenheid daarvan is de Ampère (A). Stroom is verplaatsing van elektronen. Ook daarover lees je in hoofdstuk 3. Bij een stroomsterkte van 1 A verplaatsen zich $6{,}242.10^{18}$ elektronen per seconde. Probeer dat maar eens netjes zonder exponent uit te schrijven en daarna nauwkeurig te lezen.

Dit is één manier van werken met machten van 10, maar er kan nog veel meer.

2.23.2 Stoeien met exponenten

We hebben in 2.17 gezien dat je ieder positief getal als macht van een ander positief getal kunt schrijven. Meestal is dat een gebroken macht.

We hebben daar ook gezien dat je machten van eenzelfde getal met elkaar kunt vermenigvuldigen door de exponenten op te tellen. Een voorbeeld met hele machten:

$$3^2.3^3 = 3^{2+3} = 3^5 (= 243) \qquad (2.23\text{-}1)$$

Zo breng je een vermenigvuldiging terug tot een optelling van de exponenten.

Een machtsverheffing wordt teruggebracht tot een vermenigvuldiging van de exponenten:

$$(3^3)^2 = 3^{3.2} = 3^6 = 729 \qquad (2.23\text{-}2)$$

Op een andere manier berekend:

$$3^3 = 3.3.3 = 27 \text{ en dan: } 27^2 = 729 \qquad (2.23\text{-}3)$$

De uitkomst is dus dezelfde. Probeer het als je wilt op de zakrekenmachine met nog wat andere getallen. Of in een spreadsheet zoals Excel, als je dat hebt en ermee overweg kunt.

In 2.21 hebben we de rangorde machtsverheffen, vermenigvuldigen en optellen gekoppeld aan voorrangsregels in gemengde berekeningen. We zien nu dat je met exponenten een bewerking één stap in die rangorde kunt terugbrengen. We gaan daar verder op in met het onderwerp *logaritmen*. Maar eerst een korte inleiding op dit onderwerp.

Nu we weten dat je elk positief getal kunt schrijven als een (meestal) gebroken macht van 10, kunnen we nog een stapje verder. We geven eerst een paar voorbeelden van gebroken machten:

2 is (exponent afgerond) $10^{0,30103}$

3 is (exponent afgerond) $10^{0,47712}$

Hoeveel is dan 3 miljoen als macht van 10? Dat werken we uit.

3 miljoen is 3.10^6 en 3 als macht van 10 is $10^{0,47712}$. 3 miljoen is dan $10^{0,47712}.10^6$. Bij het vermenigvuldigen van machten van hetzelfde getal moeten we de exponenten optellen. Dus krijgen we $3.10^6 = 10^{0,47712}.10^6 = 10^{6,47712}$.

Drie miljoen tot de macht 3, te schrijven als $(3.10^6)^3$ wordt geen optelling, maar een vermenigvuldiging van exponenten: $(3.10^6)^3 = 3^3.10^{3.6} = 27.10^{18}$. Maar het mag ook zo: $(3.10^6)^3 = 10^{3.0,47712}.10^{3.6} = 10^{1,43136+18} = 10^{19,43136}$.

Dan moet $27 = 10^{19,43136-18} = 10^{1,43136}$ zijn.

Hiermee zijn we toe aan de logaritmen.

2.23.3 Logaritmen

Een logaritme is een exponent zonder dat het getal waar de exponent bij hoort, wordt meegeschreven. Dat werkt alleen als het getal waar de exponent bij hoort, bekend is. Daar zijn dan ook regels voor.

Een logaritme wordt standaard afgekort tot 'log'. Als je in een wiskundige uitdrukking 'log' tegenkomt, wordt stilzwijgend een macht van 10 bedoeld. Als het anders is, hoort dat luid en duidelijk te worden aangegeven. 10 heet het *grondtal* van de logaritme. Als je het heel strikt neemt, maar dat is bijna nooit nodig, schrijf je $\log a$ als $\log_{10} a$. De 10 staat dan niet hoog geschreven zoals een exponent, maar laag. Bij (bijvoorbeeld) 27 als grondtal zou dat $\log_{27} a$ zijn. De schrijfwijze ${}^{10}\log a$ komt ook voor en betekent hetzelfde als $\log_{10} a$.

Met de twee gebroken exponenten, waarmee we in 2.23.2 hebben kennisgemaakt, kunnen we twee logaritmen schrijven.

$$\log 2 = 0,30103 \qquad (2.23\text{-}4)$$

$$\log 3 = 0{,}47712$$

Een stapje verder:

$$\log 10^6 = 6$$
$$\log 3.10^6 = \log 3 + \log 10^6 = 0{,}47712 + 6 = 6{,}47712 \qquad (2.23\text{-}5)$$

Dat hadden we hiervoor op een iets ingewikkelder manier ook uitgerekend.

2.23.4 Andere grondtallen dan 10

Een ander getal dat in de wiskunde en de natuurkunde vaak grondtal is, is het getal e. Ook in de elektronica, een onderdeel van de natuurkunde, komt e veel voor. Het beschrijven van de bijzondere eigenschappen van dit getal gaat voor een cursus als deze te ver. Je kunt er meer over lezen in https://nl.wikipedia.org/wiki/E_%28wiskunde%29. De waarde van e bedraagt afgerond 2,71828. Het getal e hoort net als bijvoorbeeld √2 tot de *irrationale getallen*. We krijgen met e te maken in hoofdstuk 4.

Logaritmen met e als grondtal geven we meestal aan met 'ln' in plaats van 'log'. De 'n' is de afkorting van 'natuurlijk', maar ook de eerste letter van de achternaam van de uitvinder van de logaritme, de Schotse wiskundige John Napier of Neper. Hij schreef daarover in 1614, meer dan 400 jaar geleden dus, een verhandeling.

De redenen voor gebruik van het grondtal 10 in plaats van het 'natuurlijke' getal e laten zich gemakkelijk raden. Ten eerste is 10 een geheel getal en ten tweede is het de basis van ons getallenstelsel.

Maar ook het getal e is een macht van 10:

$$e = 10^{\log e} = 10^{0{,}43429} \qquad (2.23\text{-}6)$$

En 10 is een macht van e:

$$10 = e^{\ln 10} = e^{2{,}30259} \qquad (2.23\text{-}7)$$

Zo kun je op beide grondtallen gebaseerde logaritmen in elkaar omrekenen:

$$\log a = 0{,}43429 \ln a \text{ en } \ln a = 2{,}30259 \log a \quad (a > 0) \qquad (2.23\text{-}8)$$

Het teken > betekent 'is groter dan'.

Nog een ander grondtal is 2. Je schrijft dan lb (log binair). Het wordt hoofdzakelijk toegepast bij datatransmissie. Het valt niet onder de eisen bij het zendexamen.

Logaritmen van 0 bestaan niet. Die van negatieve getallen ook niet, omdat gebroken machten van negatieve getallen op enkele uitzonderingen na niet bestaan. Die paar uitzonderingen zijn we in 2.19.4 tegengekomen. Daarom zetten we de toevoeging $a > 0$ er in (2.23-8) één keer bij en verder niet meer.

2.23.5 Logaritmen van getallen tussen 0 en 1

Een bijzondere logaritme is log 1. Daar komt 0 uit, want elk getal tot de macht 0 is 1. Dat geldt dus bij elk grondtal. Dus log 1=0, ln 1=0, lb 1=0 en ^{83}log 1=0.

De log van een getal kleiner dan 1, maar groter dan 0, is een negatief getal. Een voorbeeld: log 0,2= log (0,1*2)=log 0,1+log 2= -1+0,30103=-0,69897.

Het is voor het zendexamen niet nodig, hier heel diep op in te gaan. Een toepassing waarbij we logaritmen gebruiken is het bepalen van versterking of verzwakking door verschillende delen van een zend- of ontvangsysteem. Daarover gaat de volgende paragraaf, waarin we kennis maken met de decibel.

2.23.6 De decibel

Het woord ‘decibel’ zal veel lezers bekend in de oren klinken. Het wordt vaak in verband gebracht met geluidssterkte. Wie Tabel 2.4-2 nog goed in beeld heeft, zal het stukje ‘deci’ herkennen. Een tiende deel van een bel? Inderdaad, 10^{-1} Bel, en dan ook nog eens Bel met een hoofdletter. Hij is genoemd naar de telefoonpionier Alexander Graham Bell. Klik als je dat wilt hier voor meer informatie over hem. De bel wordt afgekort als B.

Wat is een bel? Een bel is de logaritme van het quotiënt van twee vermogens. De grootheid vermogen wordt behandeld in hoofdstuk 3. Daarom zijn we er hier kort over. Vermogen is energie per tijd. De eenheid is de Watt, afgekort W. Die zijn we in dit hoofdstuk al eens tegengekomen. 1 W is 1 Js^{-1}. Voluit geschreven: 1 Joule per seconde. 1 Joule (spreek uit: “Zjoel”) is bij aardse zwaartekracht genoeg om 1 kg 10,2 cm op te tillen. Dit is geen examenstof, maar bedoeld om je er een beeld van te geven! Met 1 J kun je ook 1 gram (1 g) zuiver en vloeibaar water 0,24 K (of ºC) verwarmen. Ook dit is geen examenstof, maar alleen bedoeld om je een idee te geven waarover we het hebben.

Het energieverbruik van een lamp wordt opgegeven in Watt (W). Strikt genomen moeten we spreken over het *opgenomen vermogen* van de lamp. Intensiteit van licht of geluid dat je oog of oor binnenkomt, is ook vermogen. Ook radiogolven die worden uitgestraald of opgevangen zijn dat.

De bel is een getal, want een logaritme is een exponent en dus altijd een getal. De B is handig omdat je meteen weet dat het om de verhouding van twee vermogens gaat. Neem twee vermogens en noem ze P_1 en P_2 (van het Engelse *Power*). Ze verschillen x Bel. De waarde van x bereken je met

$$x = \log \frac{P_1}{P_2} \qquad (2.23\text{-}9)$$

Stel dat $P_1 = 10\text{W}$ en $P_2 = 1\text{W}$. Dan geldt

$$x = \log \frac{10\text{W}}{1\text{W}} = \log 10 = 1\text{B} \qquad (2.23\text{-}10)$$

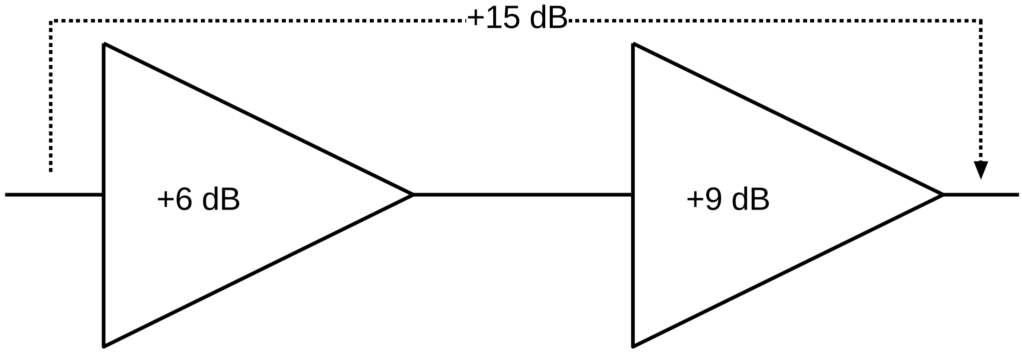
Net zoals 1 m gelijk is aan 10 dm, is 1B gelijk aan 10 dB. P_1 is dus 10 dB groter dan P_2. Je mag ook zeggen dat P_2 -10 dB groter is dan P_1, want als we in de vergelijking P_1 en P_2 verwisselen, is x=-1. In het spraakgebruik zeggen we meestal P_1 10 dB groter is dan P_2. We gebruiken vrijwel altijd de dB en niet de B.

Als $P_1 = P_2$, dan is x=log1=0. P_1 en P_2 verschillen dan 0 dB. ‘0 dB verschil’ betekent dus ‘geen verschil’. Dat zal sommigen onder ons begrijpelijker in de oren klinken dan dat de verhouding 1 is.

Als een versterker 1 mW aan signaal krijgt toegevoerd en er komt 1 W uit, dan is de vermogensversterking 1000x. log 1000 is 3, dus de versterking bedraagt 30 dB.

Bij een vermogensversterking van 2 keer spreken we over 3 dB, want log 2=0,3 (plus een heel klein beetje dat we bijna altijd verwaarlozen). 4 keer wordt dan 3 dB +3 dB=6 dB, 8 keer wordt 6dB + 3dB= 9 dB, enzovoort. Een versterking met 5dB ronden we vaak af op 3 keer, hoewel log 3 maar 0,47712 is. 4,8 dB zou dus nauwkeuriger zijn, maar omdat in de radiotechniek versterking meestal niet heel nauwkeurig is (en ook niet hoeft te zijn), kunnen we ons prima behelpen met 5dB voor ‘maal 3’.

Zetten we twee versterkers achter elkaar, waarbij de een 6 dB en de ander 9 dB versterkt, dan is de totale versterking van het tweetal 15 dB ofwel 4.8 ≈ 32 keer, zoals weergegeven in Figuur 2.23-1. Wat via een antenne een ontvanger binnenkomt, kan bijvoorbeeld 10^{-12} W zijn. Volgens Tabel 2.4-2 is dat 1 pW (picoWatt). Als er dan 1 W naar de luidspreker gaat, berekenen we een netto-versterking van 120 dB. In werkelijkheid ligt het iets ingewikkelder, omdat niet het antennesignaal uit de luidspreker komt, maar het geluid dat erin ‘verpakt’ zit. Dat heet de *modulatie*. Die komt in latere hoofdstukken aan de orde.



Figuur 2.23-1. Versterkingen in dB’s kun je in deze serieschakeling optellen.

Als we één vermogen of intensiteit in dB willen uitdrukken, hebben we altijd een vermogen of intensiteit nodig om mee te vergelijken. Bij een quotiënt of verhouding heb je nu eenmaal een teller en een noemer nodig. De grootheid waarmee je vergelijkt, heet de *referentiegrootheid*. Die is niet altijd dezelfde en wordt ook nog wel eens niet genoemd. Verderop in deze cursus zullen we ermee kennismaken. De dB wordt onder meer gebruikt in de geluidstechniek, zaken die met lichtintensiteit te maken hebben en de elektronica. De uitspraak “het geluidsniveau is 80 dB” betekent eigenlijk niets, behalve voor degenen die de referentiegrootheid kennen.

2.23.7 Samenvatting

- Heel grote of heel kleine getallen met veel nullen voor of achter de komma schrijf je gemakkelijker als getal met alleen de betekenisvolle cijfers maal een macht van 10.
- Bij vermenigvuldigen van machten van eenzelfde getal bewerk je alleen de exponenten. Die bewerking komt een stapje lager in de rangorde van macht - vermenigvuldiging – optelling in Tabel 2.21-1 dan in de oorspronkelijke bewerking. Vermenigvuldigen wordt optellen van exponenten en machtsverheffen vermenigvuldigen van exponenten.
- Een logaritme is een exponent zonder dat het getal waarvan de logaritme een exponent is, wordt meegeschreven.
- Het gangbare symbool voor een logaritme met grondtal 10 is ‘log’.
- Het gangbare symbool voor een logaritme met grondtal e is ‘ln’.
- Van elk positief getal bestaat een logaritme.
- Met logaritmen verander je een vermenigvuldiging in een optelling en een macht in een vermenigvuldiging.
- De B (bel) is de logaritme van het quotient van twee vermogens of intensiteiten. Iets anders gezegd: de logaritme van de verhouding van twee vermogens.
- In plaats van de B wordt vrijwel alleen de dB gebruikt. Die is een tiende van de B, dus 1B=10 dB
- Als we bij achter elkaar geschakelde versterkers de versterking in dB uitdrukken, vinden we de totale versterking door optelling van de dB’s.
- Je kunt geen vermogen in dB uitdrukken zonder referentievermogen.

2.24 Opgaven

2.24.1 Opgave 2-28

De baan van de aarde om de zon is ongeveer 950 miljoen km lang. Schrijf die afstand in km met niet meer dan 3 cijfers en een macht van 10.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.24.2 Opgave 2-29

De golflengte van rood licht is ongeveer 700 nm. Schrijf deze grootheid in m met een macht van 10.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.24.3 Opgave 2-30

Als log 3≈0,48 en log 2≈0,30, hoeveel is dan log 24?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.24.4 Opgave 2-31

Hoeveel is log 2^{10}? En hoeveel is $2^{10?}$

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.24.5 Opgave 2-32

Een zendantenne straalt 100 W uit. Een ontvangstantenne ergens in de wereld ontvangt daarvan 10 pW. Bereken eerst de verzwakking tussen zend- en ontvangstantenne als macht van 10 (gebruik als je dat wilt Tabel 2.4-2). Bereken vervolgens de verzwakking van zender naar ontvanger in dB.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.24.6 Opgave 2-33

Een signaal wordt achtereenvolgens versterkt door twee versterkers. De eerste versterkt 9 dB en de twee doet er nog eens 10 dB bovenop. Bij de overdracht van de eerste naar de tweede versterker treedt een verlies van 1 dB op. Hoe groot is de totale versterking in dB?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.25 Getallenstelsels

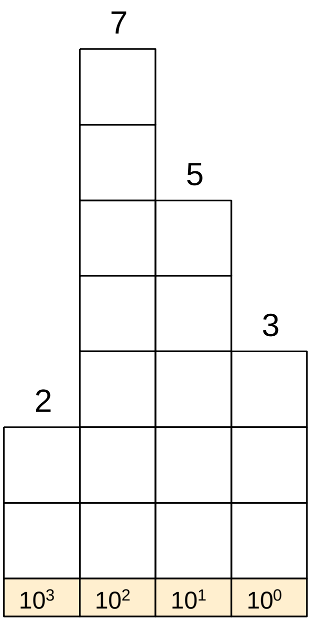
2.25.1 Inleiding

De opmars van de digitale elektronica laat ook de wereld van de radiozendamateur niet ongemoeid. Digitale systemen zijn gebaseerd op het het tweetallige stelsel. Dat kent alleen de cijfers 0 en 1. We zijn gewend, te rekenen in het tientallige of decimale stelsel. Dat kent de cijfers 0 tot en met 9. Afgezien van het aantal cijfers is het tweetallige stelsel net zo georganiseerd als ons vertrouwde tientallige systeem. Daarom bekijken we eerst hoe het tientallige stelsel precies in elkaar zit. Daarna volgt het tweetallige. We behandelen ook het zestientallige stelsel dat vooral in de digitale wereld een belangrijke rol speelt. Je kunt over getallenstelsels veel vinden op internet, bijvoorbeeld [Binaire, octale en hexadecimale getallenstelsels | Wetenschap: Wiskunde (infonu.nl)]

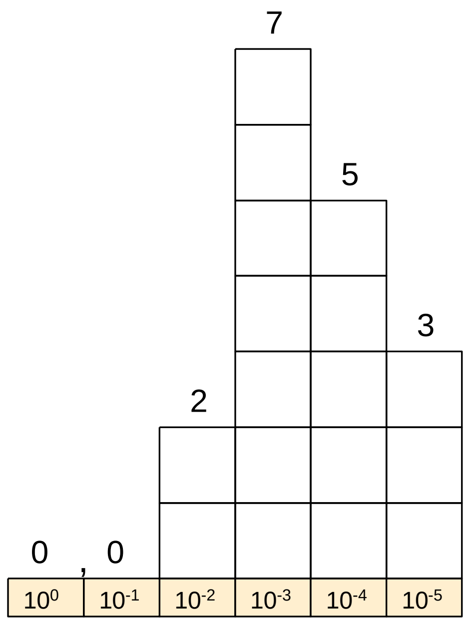
2.25.2 Het tientallige stelsel

Het tientallige of decimale stelsel is gebaseerd op het getal 10. Een getal is eigenlijk een optelling zonder dat er plustekens in staan. Alle getallen in de optelling zijn een hele macht van 10 maal een geheel getal uit het rijtje 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 of korter: 0 t/m 9. De hoogste macht van 10 die 1 of meer keer in het getal zit, staat helemaal links. Elke positie naar rechts is een macht van 10 met een exponent die 1 kleiner is dan de vorige. Zo is het getal 2753 de optelling

$$2.10^3 + 7.10^2 + 5.10^1 + 3.10^0 = 2753 \qquad (2.25\text{-}1)$$



Figuur 2.25-1. Het getal 2753, opgesplitst in getallen en hun positiewaarden (onder in in de gekleurde vakjes).



Figuur 2.25-2. Het getal 0,02753, opgesplitst in getallen, en hun positiewaarden (onder in de gekleurde vakjes). De komma staat net boven de gekleurde vakjes 10^0 en 10^{-1}.

Wie op de basisschool leert rekenen, werkt dus zonder dat te beseffen al vrij snel met machten van 10. Alleen heten ze dan *enen*, *tienen*, *honderden*, *duizenden*, of zoiets. Het kan ook in een plaatje, zoals in Figuur 2.25-1. De figuur maakt nog wat duidelijker dat in ons decimale getallenstelsel niet alleen een cijfer een waarde heeft, maar ook zijn positie in het getal. De waarde van elk cijfer in een getal is positiewaarde maal cijferwaarde.

Voor cijfers achter de komma werkt dit precies zo, alleen krijgen de exponenten van 10 een minteken. Meer is het niet. We geven weer een voorbeeld. Laten we hetzelfde getal nemen, maar dan met eerst een nul achter de komma. Bijvoorbeeld 0,02753. De optelling wordt:

$$0.10^{0} + 0.10^{-1} + 2.10^{-2} + 7.10^{-3} + 5.10^{-4} + 3.10^{-5} = 0{,}02753 \qquad (2.25\text{-}2)$$

Het bijbehorende plaatje met de komma op de juiste plek staat in Figuur 2.25-2.

2.25.3 Het tweetallige of binaire stelsel, de bit

Wat met het grondtal 10 kan, kan ook met het grondtal 2. Het tweetallige of binaire stelsel kent maar twee cijfers: 0 en 1. Dat werkt net zo goed als de 0 t/m 9 in het tientallige stelsel. Alleen worden de getallen erg lang. Voor het getal 2753 van zojuist hebben we dan geen 4, maar 12 cijferposities nodig. Computers rekenen tweetallig.

Het tweetallige stelsel is door de lengte van de getallen voor een mens niet erg overzichtelijk. Een computer heeft er geen moeite mee. Elektronica heeft juist moeite met basisschakelingen die geen twee, maar tien verschillende toestanden moeten kunnen aannemen. Zo'n schakeling is met enige moeite nog wel te bedenken en te maken, maar gaat gemakkelijker in de fout dan één die maar twee toestanden kent en die dan de benaming 0 of 1 krijgen.

Als we het getal 2753 binair uitschrijven op de manier van Figuur 2.25-1 en Figuur 2.25-2, krijgen we Figuur 2.25-3. Daarin staan niet alleen de machten van 2, maar ook de bijbehorende waarden in decimale getallen.

	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
Macht van 2	2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}
Tientallig getal	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Figuur 2.25-3. Het getal 2753, uitgeschreven als binair getal met machten van 2 weergegeven als tientallig getal.

2753 schrijf je binair dus als 1010 1100 0001, zoals Figuur 2.25-3 aangeeft. Binaire getallen komen in de cursus terug bij de digitale schakelingen (hoofdstuk 11). Dan zullen ook de decimaal uitgeschreven waarden van machten van 2 met enige regelmaat aan de orde komen.

Eén binair cijfer heet een *bit*. Dat is een samentrekking van ***bi**nary digi**t***, Engels voor *binair cijfer*. Het woord *digit* komt van het Latijnse *digitus*. Dat betekent vinger. We zijn allemaal begonnen met rekenen op onze vingers.

De omzetting van binair naar een decimaal getal is een optelling van nullen en machten van 2. Het getal 100 is binair 1100100. Dat zijn 7 bits, dus de meest linkse 1 staat voor 2^6. Het sommetje wordt dan $1100100\ binair = 2^6 + 2^5 + 0 + 0 + 2^2 + 0 + 0 = 64 + 32 + 4 = 100$. Een 0 blijft een 0 en een 1 wordt de macht van 2 die met de cijferpositie overeenkomt. De macht van 2 voor het meest linkse bit volgt uit het aantal bits. De rest volgt daaruit net als bij decimale getallen.

2.25.4 Het zestientallige of hexadecimale stelsel.

Zoals we hebben gezien, zijn binaire getallen voor de mens lastig te lezen. Daar heeft die mens natuurlijk wat op bedacht. Dat is het hexadecimale stelsel. Dat heeft zestien als grondtal. Zestien is een macht van twee. In Figuur 2.25-3 zien we dat het 2^4 is, 2.2.2.2 dus. Dat betekent 4 bits in één cijfer. Dat kort die lange reeksen bits prettig in.

We komen dan wel voor zes cijfers tekens tekort. In het decimale stelsel hebben we 10 cijfers, 0 t/m 9. In een zestientallig stelsel hebben we er zestien nodig. Dus 0 t/m 15. Maar 10 t/m 15 mag je dan niet als twee cijfers schrijven, want dan staat de linker 1 voor 16^1 en niet voor 10^1. Er zijn dus zes nieuwe cijfersymbolen nodig. Een eenvoudige oplossing is, daarvoor de eerste zes letters van het alfabet te nemen, A t/m F dus. Het moet dan duidelijk zijn dat het om een getal gaat en niet om tekst. Die duidelijkheid is er vrijwel altijd. De extra cijfers worden meestal als hoofdletter geschreven, maar als kleine letter kom je ze ook wel eens tegen.

In Tabel 2.25-1 staat een aantal getallen in decimaal, dus zoals we gewend zijn ze te schrijven. Daarnaast staan de binaire en de hexadecimale versies. De binaire getallen zijn georganiseerd in blokjes van 4, net zoals we lange decimale getallen graag in blokjes van 3 schrijven. Daarmee is de omzetting naar hexadecimaal gemakkelijk, omdat $2^4 = 16$. Elk blokje van 4 is dus één hexadecimaal cijfer dat binair is uitgeschreven. Probeer het maar voor het decimale getal 1000, dat binair 11 1110 1000 is. Voor het eerste blokje met 11 vinden we in de linker kolom 3. Voor 1110 vinden we E. Voor 1000 vinden we 8. Bij elkaar geschreven: 3E8. Omdat 16 een gehele macht van 2 is, is de omzetting betrekkelijk gemakkelijk. Deel het binaire getal van rechts naar links op in blokjes van vier. Omzetten naar decimaal is lastiger. Vanaf hexadecimaal is de omzetting het gemakkelijkst, want die getallen zijn kort. Laten we weer het decimale getal 1000 uit de tabel nemen. Dat zou hexadecimaal 3E8 moeten zijn. Dat controleren we. Hexadecimaal schrijven we (let op: 10 hexadecimaal is 16 decimaal!):

$$3E8 = 3.10^2 + E.10^1 + 8.10^0$$

Decimaal wordt dat

$$3.16^2 + 14.16^1 + 8.16^0 = 3.256 + 14.16 + 8.1 = 768 + 224 + 8 = 1000$$

Het klopt dus.

Tabel 2.25-1. Decimale, binaire en hexadecimale schrijfwijze van een aantal getallen. In de binaire getallen zijn de cijfers van rechts naar links opgesplitst in blokjes van 4.

Decimaal	Binair	Hexadecimaal	Decimaal	Binair	Hexadecimaal
0	0	0	20	1 0100	14
1	1	1	31	1 1111	1F
2	10	2	32	10 0000	20
3	11	3	63	11 1111	3F
4	100	4	64	100 0000	40
5	101	5	100	110 0100	64
6	110	6	127	111 1111	7F
7	111	7	128	1000 0000	80
8	1000	8	255	1111 1111	FF
9	1001	9	256	1000 00000	100
10	1010	A	511	1 1111 1111	1FF
11	1011	B	512	10 0000 0000	200
12	1100	C	1000	11 1110 1000	3E8
13	1101	D	1023	11 1111 1111	3FF
14	1110	E	1024	100 0000 0000	400
15	1111	F	2047	111 1111 1111	7FF
16	1 0000	10	2048	1000 0000 0000	800

Omrekenen van decimaal naar binair of hexadecimaal is lastiger. Dat komt vooral doordat we niet gewend zijn om in die twee getallenstelsels te denken. Voor een voldoende begrip van digitale schakelingen is het ook niet nodig. Aan de linker kolom van Tabel 2.25-1 heb je vrijwel altijd genoeg. Het is voor het zendexamen ook niet nodig, dit allemaal uit het hoofd te leren. Begrijpen is voldoende.

2.25.5 Samenvatting

- In elk getallenstelsel is een getal een optelling zonder plustekens
- De waarde van elk cijfer in een getal is het product van het cijfer zelf en de macht van het grondtal die is gekoppeld aan de positie van het cijfer.

- De waarde van de cijferpositie bij een grondtal n is vanaf de komma **naar links** n^0, n^1, n^2, enzovoort. Vanaf de komma **naar rechts** geldt n^{-1}, n^{-2}, n^{-3}, enzovoort.
- Het aantal benodigde cijfers in een getallenstelsel is gelijk aan het grondtal. Ze beginnen bij 0 en lopen op tot en met het grondtal min één. In het 10-tallige stelsel gaat het dus om 0 tot en met 9, bij het 2-tallige om 0 en 1, en bij het 16-tallige stelsel om 0 tot en met F.

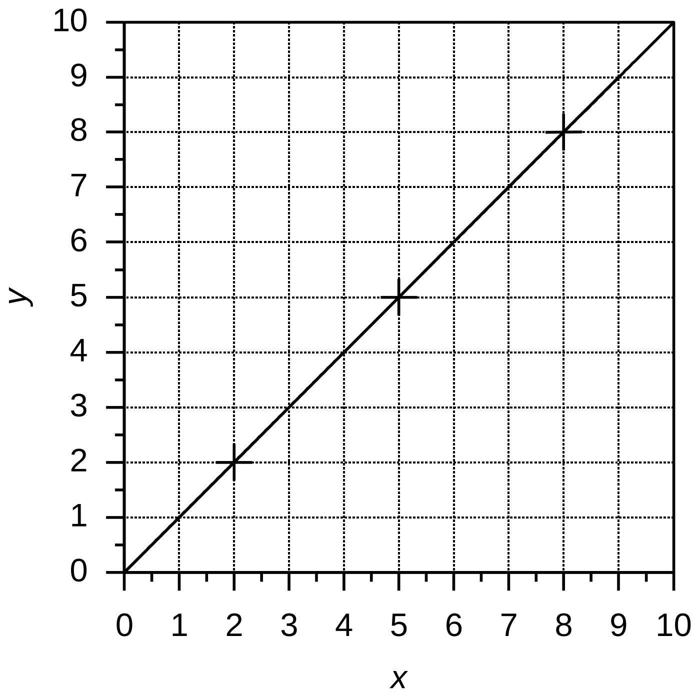
2.26 Grafieken

2.26.1 Wat zie je aan een grafiek?

Grafieken zijn bedoeld om verbanden tussen getallen en/of grootheden zichtbaar te maken. Eigenlijk hebben we er al kennis mee gemaakt. Figuur 2.9-2 die de ontlading van een accu in de tijd weergeeft, is een voorbeeld. Figuur 2.13-1 met de taartpunten ook. Ook in de natuur komen beelden voor die je grafieken zou kunnen noemen. Een voorbeeld is Foto 2-1. Daarop is een bosje in de duinen te zien. De zeewind brengt behalve wind ook zout mee en daar houden de bomen niet van. Het vermindert hun groei. De zoute wind waait hier van links naar rechts. De meest linkse bomen vangen het eerste zout op. Zo kan de volgende boom ietsje hoger groeien en zo verder. De foto toont zo een grafiek van groeiomstandigheden voor de bomen. Die worden van links naar rechts beter.

Foto 2-1. Een door zoute zeewind beïnvloed bosje in de duinen toont een natuurlijke grafiek van de verandering van de groei van bomen met toenemende beschutting tegen zoute wind.

Een lijngrafiek geeft het verband tussen twee grootheden of getallen. De eenvoudigste is $y=x$. Recept: teken een horizontale en een verticale lijn. Zet op de verticale y en op de horizontale x uit. In theorie kan het ook andersom, maar het wordt zelden gedaan. We noemen die lijnen de *assen* van de grafiek. Vind nu enkele punten in de grafiek waar de horizontale afstand tot de y-as gelijk is aan de verticale afstand tot de x-as. Trek daar een rechte lijn doorheen. Een resultaat zie je in Figuur 2.26-1.



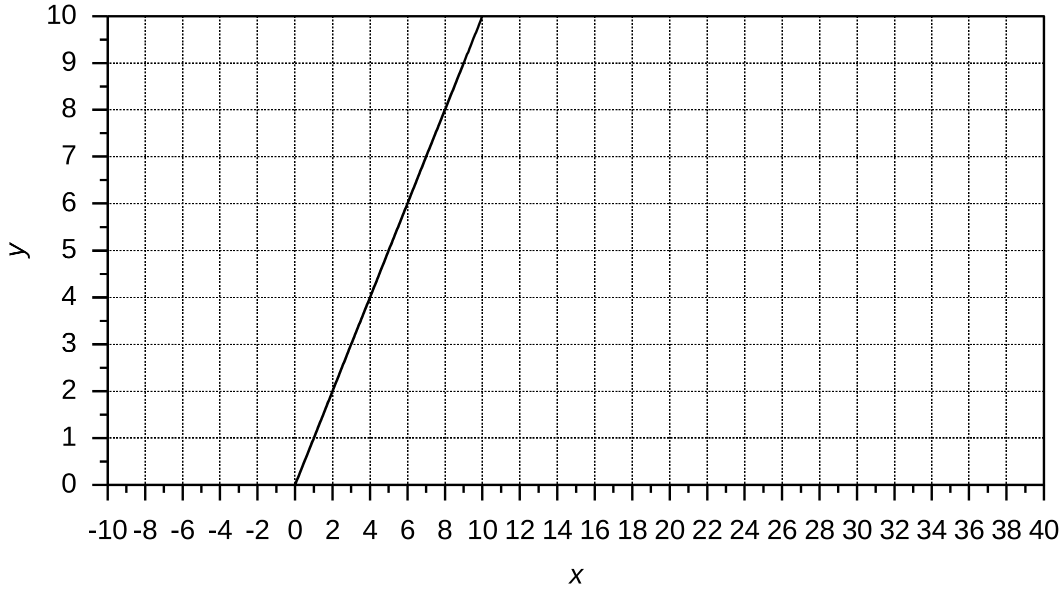
Figuur 2.26-1. Grafiek van y=x *voor* x *tussen 0 en 10. De drie kruisjes of plustekens staan voor enkele gevonden punten in de grafiek.*

Voor elke waarde van x vond je nu de bijbehorende waarde van y door vanaf x recht omhoog te gaan naar de schuine lijn. Op het snijpunt ga je naar links en leest y af op het snijpunt met de y-as. In dit geval levert dat dezelfde waarde op. Zo hoort dat ook in een grafiek $y=x$.

Andere mogelijkheden voor de grafiek van Figuur 2.26-1 zijn:

- De kruisjes van de gevonden punten hadden ergens anders op de lijn mogen liggen. Het hadden er ook twee, vier of meer mogen zijn.
- Op de assen hadden ook negatieve getallen mogen staan, bijvoorbeeld een rijtje van -10 tot +5 of -100 tot 0. De lijn zou ook dan recht zijn geweest. Een voorbeeld van dezelfde grafiek maar met een andere x-as zien we in Figuur 2.26-2.
- De twee assen van de grafiek in Figuur 2.26-1 hoeven niet even lang te zijn of precies dezelfde getallen te tonen.

Neem nu een getal op de x-as, bijvoorbeeld 7,5. Ga vanaf dat punt recht omhoog tot je op de schuine lijn komt en ga vandaar horizontaal naar links tot je de y-as kruist. Als je het goed hebt gedaan, ben je op het punt y=7,5 aangeland.



Figuur 2.26-2. Grafiek van y=x voor x *tussen 0 en 10, net als Figuur 2.26-1. De* x*-as loopt nu van -10 tot +40 en de kruisjes zijn weggelaten.*

Nu Figuur 2.26-2. De *x*-as loopt nu van -10 naar +40. Vanwege de ruimte staan alleen de even getallen erop. We zeggen ook wel dat de *schaal* van de *x*-as en de *schaal* van de *y*-as ongelijk zijn.

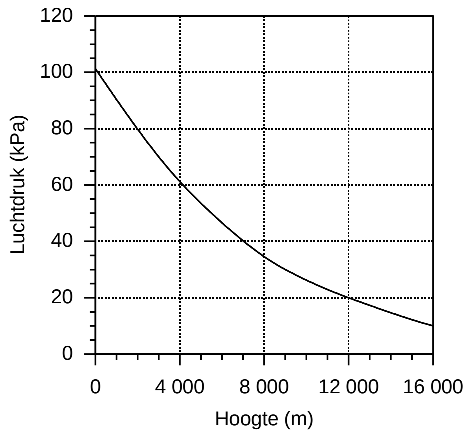
De lijn in de grafiek loopt steiler omhoog dan in Figuur 2.26-1. Dat komt doordat de getallen op de *x*-as dichter op elkaar staan. De lijn begint ook niet op de kruising van de assen, maar waar het getal 0 op de *x*-as staat. Had de *y*-as ook van -10 tot +40 gelopen, dan had ook de grafiek doorgelopen. Bedenk zelf hoe de grafiek $y=2x$ eruit moet zien. Is die steiler of juist minder steil dan $y=x$?

2.26.2 Waarop moet je vooral letten bij een grafiek?

Bij een grafiek moeten we op minstens drie dingen letten

1. Wat staat op welke as?
2. De *schaal* van de assen
3. Het *nulpunt* van de assen.

Grafieken hoeven niet rechtlijnig te zijn. Kromme grafieken komen veel vaker voor dan rechte. Een voorbeeld is de afname van de luchtdruk met de hoogte boven het aardoppervlak. Een grafiek daarvan ziet er ongeveer uit als Figuur 2.26-3.



Figuur 2.26-3. Gemiddelde luchtdruk tegen de hoogte boven het aardoppervlak. Voorbeeld van een niet-rechtlijnige grafiek.

De luchtdruk staat aangegeven in kPa, voluit kilopascal. De pascal is in het SI-stelsel de eenheid van druk. De hoogte staat op de horizontale as. Gevoelsmatig zouden we die eerder op de verticale as zetten. Daar is niets op tegen. De grafiek van Figuur 2.26-3 heeft alleen maar een horizontale hoogte-as om te laten zien dat het ook anders kan en mag. Bij grafieken is het dus verplicht om te kijken wat waar staat.

We kunnen bijvoorbeeld uit Figuur 2.26-3 aflezen wat ongeveer de luchtdruk op 5000 m hoogte is. Het streepje op de hoogte-as rechts van dat van 4000 m is dat van 5000 m. Tel zelf even na. Ga daarvandaan recht omhoog tot je de kromme lijn tegenkomt. Dan ga je horizontaal naar links naar de luchtdrukas en je vindt ongeveer 55 kPa. Dat is ruim de helft van de druk op 0 m (zeeniveau) die gemiddeld ongeveer 101 kPa is.

Bij het maken van een grafiek zoals in Figuur 2.26-3 kun je niet volstaan met een paar punten en een liniaal, zoals in Figuur 2.26-1. In Figuur 2.26-3 heb je meer punten nodig om de kromme lijn goed te tekenen.

In de loop van deze cursus zul je allerhande soorten grafieken tegenkomen. Kijk altijd meteen wat op elke as staat. Dat hoort bij de as te staan, anders is het een onleesbare grafiek. Je zult grafieken tegenkomen die heel anders in elkaar zitten. Grafieken zijn er om iets in één oogopslag te kunnen zien of in elk geval om iets te verduidelijken. Dat neemt niet weg dat ze vooral van de onervaren lezer enig denkwerk kunnen vragen over wat nu precies wat is.

2.27 Vergelijkingen

2.27.1 Hoe zit een vergelijking in elkaar?

Een wiskundige vergelijking heeft de vorm van

- iets is gelijk aan iets anders, geschreven als ‘iets = iets anders’. Voorbeeld: $b=a+1$.
- Iets is ongelijk aan iets anders, geschreven als ‘iets ≠ iets anders’. Voorbeeld: $b\neq a+1$
- iets is groter dan iets anders, geschreven als ‘iets > iets anders’. Voorbeeld: $b>a+1$.

- iets is groter dan of gelijk aan iets anders, geschreven als 'iets ≥ iets anders'. Voorbeeld: $b \geq a+1$.
- iets is kleiner dan iets anders, geschreven als 'iets < iets anders'. Voorbeeld: $b < a+1$.
- iets is kleiner dan of gelijk aan iets anders, geschreven als 'iets ≤ iets anders'. Voorbeeld: $b \leq a+1$.

Voor 'vergelijking' wordt ook wel het woord 'formule' gebruikt. Wij gebruiken de wiskundig juistere term 'vergelijking'. Een vergelijking met een '=' betekent een gelijkheid. Die met een '>' , een '<' of '≠ ' een ongelijkheid. Die met een '≥' of een '≤'kunnen allebei zijn. Aan weerskanten van het vergelijkingsteken moet iets staan. Dat zijn de *leden* van de vergelijking, te onderscheiden in een linker- en een rechterlid. Als een lid ontbreekt, is de vergelijking niet af en kun je er niets mee.

2.27.2 Gelijkheden

De belangrijkste vergelijkingen die we in de elektronica gebruiken zijn gelijkheden. De belangrijkste vraag is hoe je daarmee omgaat om er iets zinnigs uit te krijgen. Als er verder niets bij een vergelijking staat, hoort hij algemeen geldig te zijn. We beginnen met

$$y = x + 2 \qquad (2.27\text{-}1)$$

Daar kunnen we al wat aan zien. Om te beginnen is y groter dan x. Om precies te zijn: 2. Verder moeten x een getal zijn, anders kun je 2 en x niet bij elkaar optellen. Dan moet y ook een getal zijn, want de leden aan weerskanten van het ′=′ teken moeten gelijk aan elkaar zijn.

De waarden aan weerskanten van het '=' teken blijven aan elkaar gelijk als we in beide leden dezelfde bewerking uitvoeren. Voorbeeld: -2 erbij optellen Dus

$$y - 2 = x + 2 - 2 \qquad (2.27\text{-}2)$$

Dus

$$y - 2 = x \qquad (2.27\text{-}3)$$

Het resultaat is dat we de 2 van het rechter- naar het linkerlid hebben verhuisd. Bij die verhuizing verandert het teken. We hebben de bewering 'y is twee groter dan x' vervangen door 'x is 2 kleiner dan y'. Dat betekent hetzelfde. Wiskunde is uiteindelijk niet meer dan boerenverstand.

Met vermenigvuldigen gaat het net zo.

$$y = 2x \qquad (2.27\text{-}4)$$

Hier is y dus het dubbele van x. y en x kunnen nu getallen of grootheden zijn. Maar de een kan niet een grootheid zijn terwijl de ander een getal is. Dan is de gelijkheid zoek. Een getal maal een getal blijft een getal, een getal maal een grootheid is nog steeds een grootheid. Als we beide leden met hetzelfde getal of dezelfde grootheid vermenigvuldigen, blijft de gelijkheid in stand, net als bij de optelling van zonet. Vermenigvuldigen met ½ (is delen door 2) geeft

$$\frac{y}{2} = x \tag{2.27-5}$$

De twee is verhuisd van het ene lid naar het andere met omkering van de waarde. Andersom mag ook, want het gaat om een gelijkheid:

$$x = \frac{y}{2} \tag{2.27-6}$$

Hier staat dat x de helft van y is. Dat is een andere manier om te zeggen dat y het dubbele van x is. Dus alweer: wiskunde is niet meer dan boerenverstand.

Met machten is het niet anders:

$$y = x^2 \tag{2.27-7}$$

Het trekken van de (vierkants)wortel van beide leden levert

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} \tag{2.27-8}$$

En dus

$$\sqrt{y} = x \tag{2.27-9}$$

Of

$$x = \sqrt{y} \tag{2.27-10}$$

Maar ook:

$$x = y^{\frac{1}{2}} \tag{2.27-11}$$

In (2.27-11) zien we dat de exponent van y het omgekeerde van de exponent van x in (2.27-7) is geworden.

Nu een logaritme.

$$\log 2 = 0{,}30103 \tag{2.27-12}$$

Dat is hetzelfde als

$$2 = 10^{0{,}30103} \tag{2.27-13}$$

Een nu een logaritme met lettersymbolen:

$$\log y = x \tag{2.27-14}$$

Dat is hetzelfde als

$$y = 10^x \tag{2.27-15}$$

x en y moeten getallen zijn, want een exponent kan geen grootheid zijn en een logaritme dus ook niet.

2.27.3 Ongelijkheden

Bij ongelijkheden gelden dezelfde regels als bij gelijkheden. Voor >, <, ≥ en ≤ zijn er twee uitzonderingen.

1. Als we linker- en rechterlid verwisselen, keert het ongelijkheidsteken om. Voorbeeld:

$$3 > 2 \tag{2.27-16}$$

Drie is groter dan 2. Dan is 2 kleiner dan 3, dus

$$2 < 3 \tag{2.27-17}$$

2. Als we beide leden met een negatief getal vermenigvuldigen, gebeurt hetzelfde

$$3 > 2 \tag{2.27-18}$$

Vermenigvuldigen met -1

$$-3 < -2 \tag{2.27-19}$$

Inderdaad is -3 minder dan -2.

Met ≥ en ≤ gaat het net zo als met > en <.

2.28 Opgaven

2.28.1 Opgave 2-34

Teken op millimeterpapier (klik op het woord en druk af) de grafiek van de tabel met waarden voor x en y.

x	y
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.28.2 Opgave 2-35

Vind uit de vergelijking x-2= 10 de waarde van x door bij beide leden 2 op te tellen

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.28.3 Opgave 2-36

Hoeveel moet je in de vergelijking x+6=15 bij beide leden optellen om de waarde van x te vinden?

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.28.4 Opgave 2-37

Bereken x uit $7x$=14 en uit $x/2$=1.

Antwoord gevonden? Naar de uitwerking

2.29 Evenredigheid

Bekijk de vergelijking

$$x = \frac{ab}{cd} \qquad (2.29\text{-}1)$$

Als *a* of *b* twee keer zo groot wordt, dan wordt *x* ook 2x zo groot. De 2 mag je vervangen door ieder ander getal. Dat kennen we al van het vermenigvuldigen van beide leden met hetzelfde getal, zodat het '=' teken geldig blijft. We zeggen dan dat *a* en *b* *evenredig* zijn met *x*. Of *x* is *evenredig* met *a* en *b*. Dat betekent hetzelfde. In plaats van *evenredig* wordt ook wel de term *recht evenredig* gebruikt. Dat gebeurt vooral als er een onderscheid wordt gemaakt met *omgekeerd evenredig*.

Wat is *omgekeerd evenredig*? Voor *x* en *c* of *d* geldt het omgekeerde van het verband tussen *x* en *a* of *b*. Wordt *c* of *d* 2 maal zo groot, dan wordt *x* 2 maal zo klein. Je mag ook zeggen: wordt *c* of *d* ½ maal zo groot, dan wordt *x* 2 maal zo groot. Ook hier mag je 2 vervangen door ieder ander getal en ½ door het omgekeerde van dat andere getal. Dat noemen we *omgekeerd evenredig*. Die term ligt natuurlijk voor de hand, omdat in het rechterlid het omgekeerde gebeurt van wat links plaatsvindt. De waarde van *x* is in de vergelijking dus *omgekeerd evenredig* met *c* en *d*.

Deze termen zul je verderop in de cursus af en toe tegenkomen. Vanaf nu weet je wat ze betekenen.

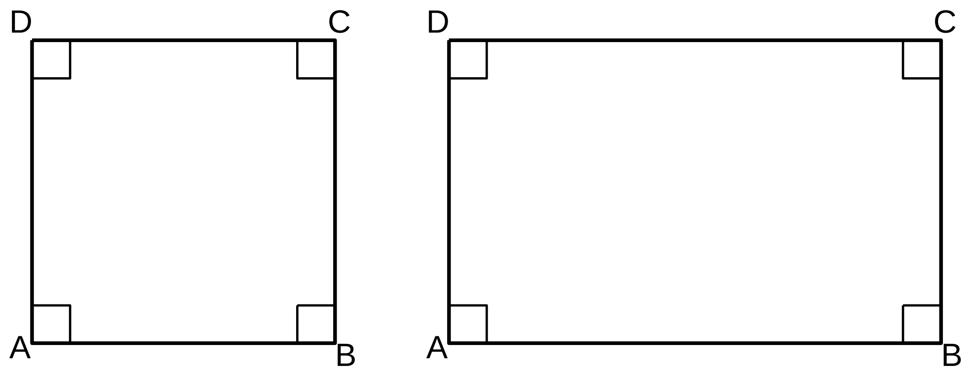
2.30 De stelling van Pythagoras

2.30.1 Rechte hoeken

Een vergelijking die we zullen toepassen (in hoofdstuk 5 en verder), is de stelling van Pythagoras. Pythagoras was een Griekse wijsgeer die meer dan 2500 jaar geleden leefde. De stelling wordt vaak aan hem toegeschreven, maar is waarschijnlijk al van vóór zijn tijd.

De stelling wordt gebruikt bij sommige berekeningen aan wisselstroom. Daarover gaat hoofdstuk 5.

De stelling zelf gaat over de lengten van de zijden van een rechthoekige driehoek. Dat is een driehoek waarvan één hoek recht is. Een rechte hoek is een hoek van 90 graden. Meestal schrijven we dat als 90°. De hoeken van een vierkant of een rechthoek zijn allemaal recht. (Figuur 2.30-1). Hoe dat met wisselstroom in verband te brengen is, leer je ook in hoofdstuk 5.

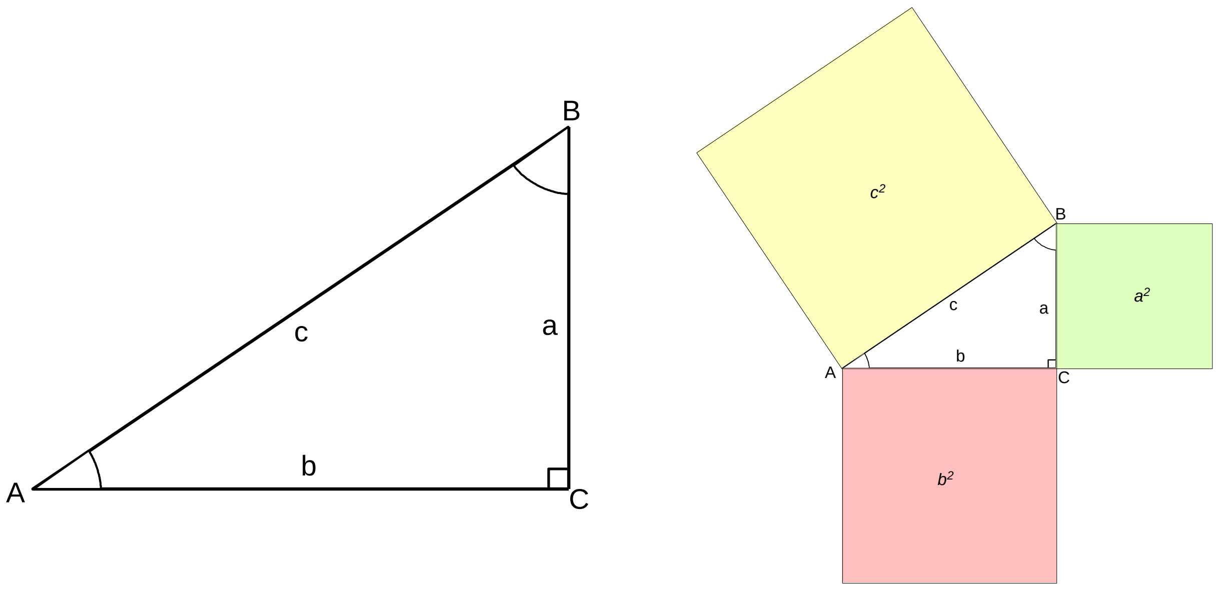


Figuur 2.30-1. Een vierkant (links) en een rechthoek (rechts) hebben rechte hoeken.

Om verwarring te voorkomen: een rechte lijn heeft geen hoeken en dus ook geen rechte hoek.

2.30.2 De stelling zelf

In Figuur 2.30-2 staat links een rechthoekige driehoek afgebeeld. De driehoek heeft hoekpunten A, B en C. De hoek op C is recht, die op A en B zijn *scherp*. Zo heet een hoek van minder dan 90º. Eentje van meer dan 90º heet *stomp*. De zijden heten a, b en c en hebben lengten *a*, *b* en *c*. De lengten staan *cursief*, want het zijn grootheden. Een zijde zelf is een stukje rechte lijn. Dat is een ding, vandaar dat die letter rechtop staat.



Figuur 2.30-2. Links: rechthoekige driehoek. Rechts: rechthoekige driehoek met gekwadrateerde zijden.

De stelling van Pythagoras zegt dat

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2.30-1}$$

De drie kwadraten staan rechts in Figuur 2.30-2. Het kwadraat van een lengte is een oppervlakte en zo is het rechts in Figuur 2.30-2 weergegeven. De vergelijking zegt dat de gele oppervlakte gelijk is aan de som van de groene en de roze oppervlakte. Een aantal wiskundige bewijzen vindt de liefhebber bijvoorbeeld op Wikipedia.

2.30.3 Toepassen

Nu terug naar de vergelijking. Als twee van de drie zijden bekend zijn, kun je de derde uitrekenen. Met onze opgedane kennis van vergelijkingen moet dat lukken.

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (2.30\text{-}2)$$

De eerste vergelijking is omgedraaid om een uitdrukking voor c in zijn eentje te hebben. En dus geldt

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2.30\text{-}3)$$

Zo kunnen we ook een vergelijking voor a en b maken. Opnieuw:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (2.30\text{-}4)$$

Als we een vergelijking voor b willen vinden, dan moet a niet in de weg zitten. We tellen dus in beide leden $-a^2$ erbij. Daarmee verhuist a^2 als - a^2 naar het rechterlid:

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (2.30\text{-}5)$$

Nu kunnen we de vergelijking voor b uitschrijven:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad (2.30\text{-}6)$$

Op dezelfde manier vinden we de vergelijking voor a

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad (2.30\text{-}7)$$

Met de stelling van Pythagoras kun je een rechte hoek maken. Dat gaat met lengten van 3, 4 en 5 gelijke eenheden. Wat voor eenheden doet er niet toe. Kijk maar.

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad (2.30\text{-}8)$$

Inderdaad is 9+16=25. Dat lukt alleen met deze drie getallen of gelijke veelvouden ervan, zoals 6, 8 en 10. Met genoeg touw, drie spijkers of tentpennen en een liniaal of duimstok moet het zo lukken om een rechte hoek te maken.

2.30.4 Samenvatting

- Het kwadraat van de lengte c van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de lengten a en b van de zijden vanuit de rechte hoek. Dus $a^2 + b^2 = c^2$. Dat is de stelling van Pythagoras.
- Als je de lengten van twee zijden kent, kun je die van de derde zijde uitrekenen.
- In de elektronica wordt de stelling toegepast in de wisselstroomtheorie (hoofdstuk 5).

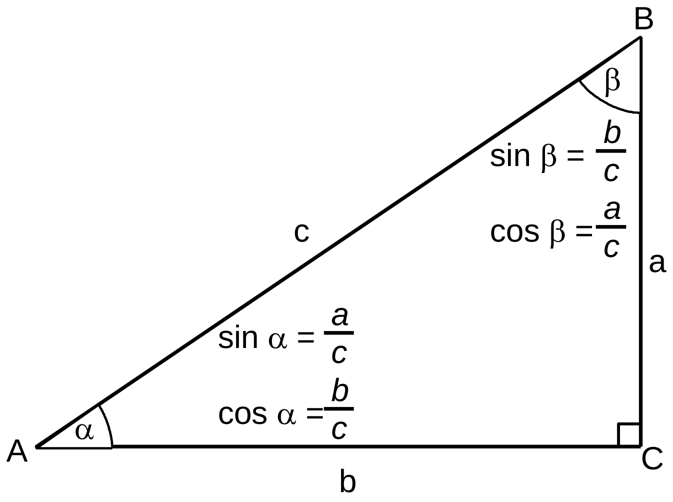
2.31 Goniometrische verhoudingen en π (pi)

2.31.1 Goniometrische verhoudingen

Goniometrie is rekenen met en aan hoeken. Met hoeken hebben we kennis gemaakt bij de stelling van Pythagoras. Daar is ook al gezegd dat die bij de wisselstroom in hoofdstuk 5 aan de orde komt. We behandelen nu nog wat meer basiskennis die we daarbij nodig hebben. Dat zijn de sinus en de cosinus.

2.31.2 Sinus en cosinus

Om met de sinus en de cosinus van een hoek kennis te maken, bekijken we Figuur 2.31-1.



Figuur 2.31-1. Sinussen en cosinussen van twee hoeken.

De getekende driehoek met hoekpunten ABC is dezelfde als die van Figuur 2.30-2 links. Toegevoegd zijn de hoekaanduidingen α en β. Dat zijn Griekse letters, uitgesproken als *alfa* en *bèta*. Voor hoeken worden vaak Griekse letters gebruikt. Hoek α zit bij hoekpunt A, β bij hoekpunt B. De sinus van α is de lengte a van de zijde a die er tegenover ligt, gedeeld door de lengte c van de schuine zijde c. De standaardafkorting van sinus is 'sin'. Nu kunnen we schrijven:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad (2.31\text{-}1)$$

Dat staat ook in Figuur 2.31-1. De cosinus van α is de lengte b van de zijde b die met a een rechte hoek maakt, gedeeld door c. De cosinus wordt afgekort met cos. Dus:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad (2.31\text{-}2)$$

Voor de hoek β bovenin geldt hetzelfde, maar daar is b de tegenoverliggende zijde en a de zijde die tegen de hoek aan ligt.

Dus

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \qquad (2.31\text{-}3)$$

En

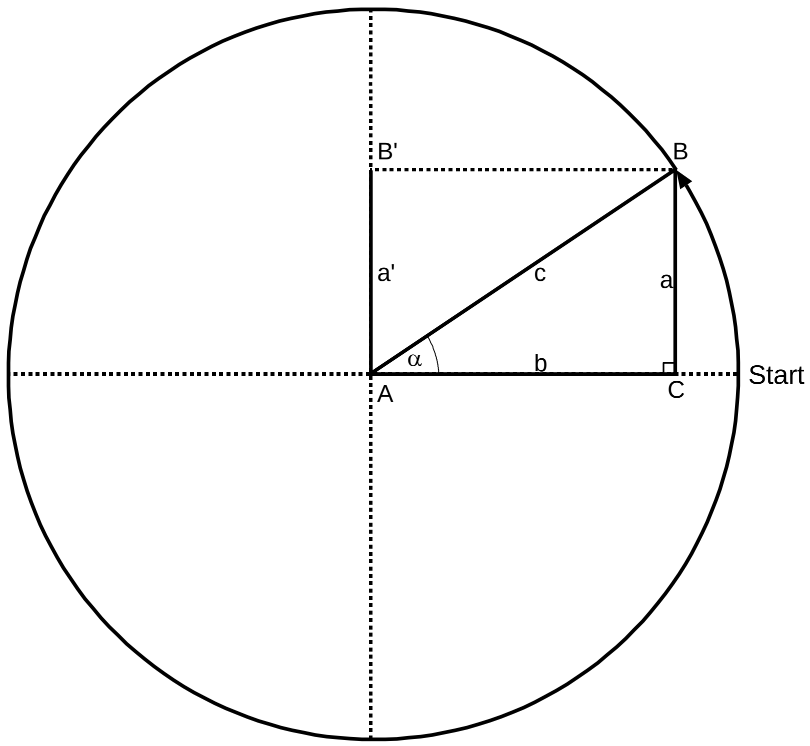
$$\cos \beta = \frac{a}{c} \qquad (2.31\text{-}4)$$

Vergelijk dit met de uitkomsten voor hoek α in (2.31-1) en (2.31-2) Dan zien we dat de sinus van de één gelijk is aan de cosinus van de ander. In wiskundige vorm levert dat

$$\sin \alpha = \cos \beta \;\text{ en }\; \sin \beta = \cos \alpha \qquad (2.31\text{-}5)$$

Als de hoek α verandert, verandert β ook. Samen zijn ze altijd 90°. Dat komt doordat de som van de hoeken van een driehoek altijd 180° is. 90° daarvan zit in de rechte hoek op punt C. Dan blijft er 90° over voor de andere twee hoeken samen.

2.31.3 Sinus, cosinus en de cirkel



Figuur 2.31-2. Rechthoekige driehoek en cirkel met horizontale en verticale middellijn. Middelpunt is A op de kruising van de middellijnen. B ligt op de cirkelomtrek. Het lijnstuk AB' met lengte a' is even lang als het verticale lijnstuk CB met lengte a.

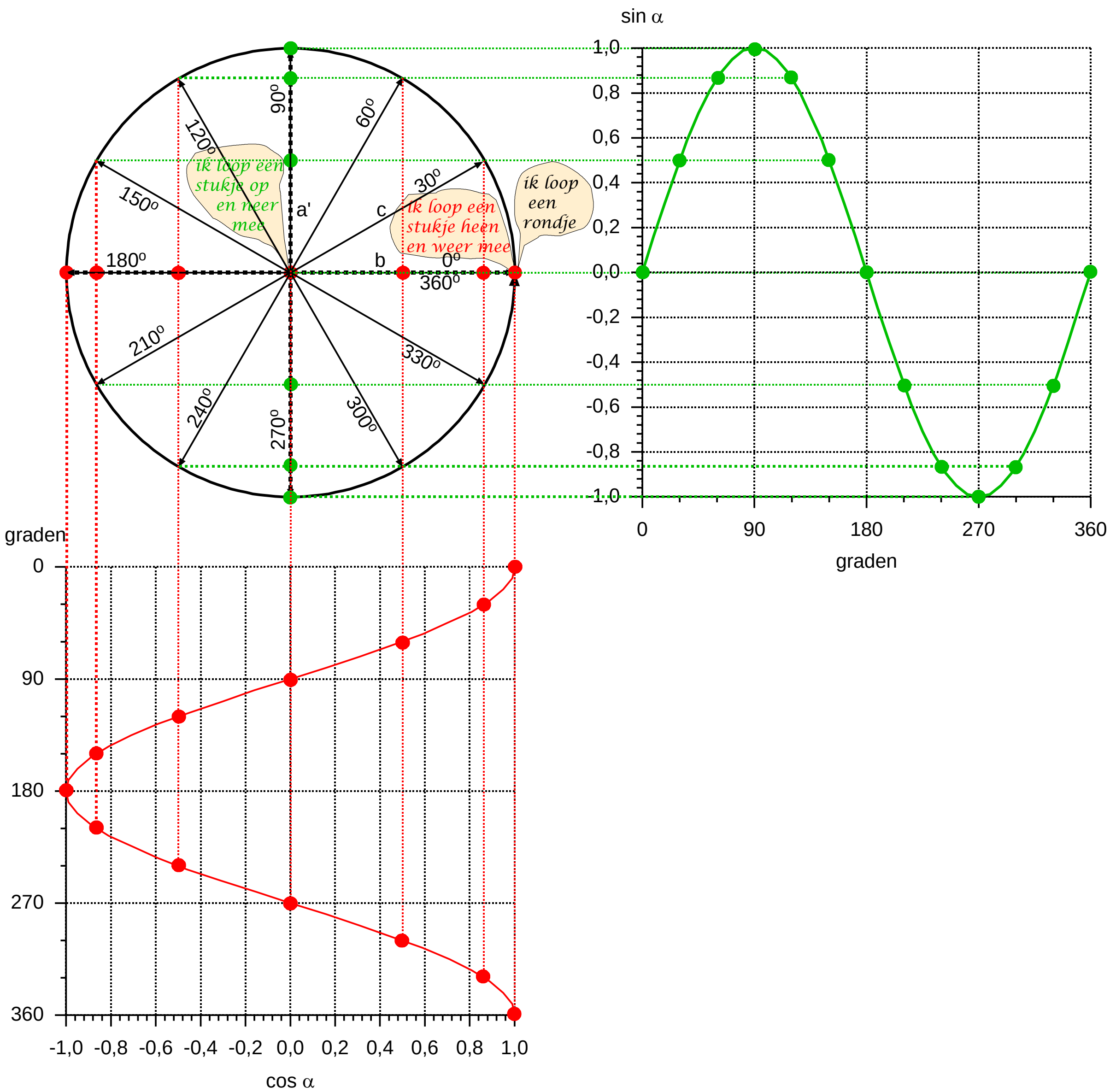
De verandering van sinus en cosinus met hun bijbehorende hoek is zichtbaar te maken in een grafiek. Daarvoor laten we punt B in Figuur 2.31-1 een cirkel beschrijven met punt A als middelpunt. De hoek bij C blijft steeds recht. De afstand van A tot de cirkelomtrek is dan altijd gelijk aan *c*. Die afstand heet de *straal* van de cirkel. Figuur 2.31-2 laat het zien.

Behalve de verkleinde driehoek van Figuur 2.31-1 zien we in Figuur 2.31-2 nog meer:

- De cirkel met een gestippelde horizontale en een verticale middellijn.
- De pijl in de cirkelomtrek bij B geeft de bewegingsrichting. Die is tegen de klok in. Dat is in de wiskunde een afspraak.
- Het woordje 'Start' geeft het begin van de cirkelgang van punt B. De beweging is in de figuur dus al een stukje op weg.
- Er loopt een horizontale stippellijn van punt B naar punt B' op de verticale middellijn. B' spreek je uit als *B-accent*.
- De lijn van B' naar A, die a' is genoemd, is even lang als zijde a van B naar C. Net als a heeft hij dus de lengte *a*. Zijde a verplaatst zich tijdens de cirkelgang; a' blijft op zijn plaats en wordt alleen langer of korter. Dat gold al voor zijde b.

We 'benoemen' *c* tot eenheid van lengte. Dan is a' in Figuur 2.31-2 de afbeelding van sin α en is b die van cos α. Daarmee hebben we voor beide een afbeelding waarvan het beginpunt vastligt en die alleen langer of korter wordt Daar gaat het om.

Dan het teken. Ligt b rechts van de verticale middellijn, dan zijn *b* en dus cos α positief. Ligt b daar links van, dan zijn *b* en cos α negatief. Liggen a en a' boven de horizontale middellijn, dan zijn *a* en sin α positief, liggen ze eronder, dan zijn *a* en sin α negatief.



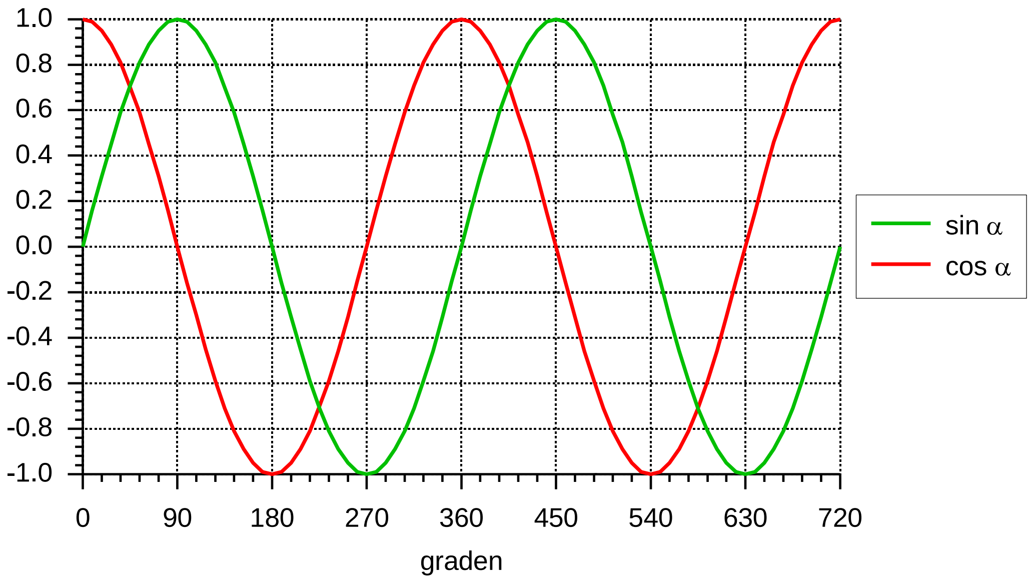
Figuur 2.31-3. Constructie van sinus (groen) en cosinus (rood) uit een cirkelbeweging met stappen van 30°.

De constructie is in beeld gebracht in Figuur 2.31-3. In de cirkel is van de driehoek alleen de ligging van a', b en c bij α=0 aangegeven. Bij 0° vallen b en c samen. Daar is b=c en a=0. Zodra de top van c begint te lopen, krimpt b en groeit a. De cosinus begint dus bij 1 en met krimp. De sinus begint bij 0 en met groei. De cosinus zien we in de rode grafiek die ten opzichte van de groene op zijn kant ligt. De sinus zien we in de groene. Bij 30° is de sinus al 0,5 terwijl de cosinus nog ongeveer 0,87 is.

Als de cosinus bij een hoek van 60° nog maar 0,5 is, is de sinus gevorderd tot 0,87 en als de cosinus 0 is, is de sinus 1. Alle waarden tussen -1 tot +1 komen bij de sinus en bij de cosinus twee keer voor in één rondje. De uitersten 1 en -1 komen elk één keer voor. Bij de sinus zien we de waarde 0 drie keer, maar dat komt doordat begin en eind 0 zijn. Een cirkelgang begint en eindigt nu eenmaal op hetzelfde punt. Bij de cosinus komt door dezelfde oorzaak de waarde +1 twee keer voor. Een bewegende versie van Figuur 2.31-3 zie je in deze animatie. Daarin wordt ook gesproken over radialen. Daarmee lopen we vooruit op paragraaf 2.32 waarin radialen als meer natuurlijke vervanger van graden van een hoek worden behandeld. Nog even geduld dus.

2.31.4 Periode en fase

Eén rondje van c in Figuur 2.31-3 heet een *periode*. Bij elke volgende periode zien sinus en cosinus er weer precies zo uit, want aan de cirkel verandert niets. In Figuur 2.31-4 is dat voor twee opeenvolgende perioden weergegeven. De sinus heeft dezelfde vorm als de cosinus, maar loopt er 90° op achter. We zeggen dan dat de *fase* van de sinus 90° achterloopt op de fase van de cosinus. Je kunt natuurlijk ook zeggen dat de fase van de sinus 270° voorloopt op die van de cosinus.



Figuur 2.31-4. Sinus en cosinus met elk twee volle perioden van 360°, dat is dus 720°.

Wisselstroom wisselt van richting. In veel gevallen –maar niet altijd- ziet een grafiek van wisselstroom eruit als een sinus. Daarover vind je (veel) meer in hoofdstuk 5.

Er zijn meer goniometrische verhoudingen dan sinus en cosinus. Dat zijn tangens, cotangens, secans en cosecans. Die vier zijn geen examenstof en we doen er in deze cursus niets mee. Je hebt ze ook niet nodig om examenstof te begrijpen. Kom je ze toch ergens tegen en je wilt er meer van weten, dan kun je bijvoorbeeld terecht op https://nl.wikipedia.org/wiki/Goniometrische_functie of http://www.open.ou.nl/evv/nkbw/goniometrische_functies.pdf.

2.31.5 Het getal π (pi)

Wat is de afstand die de punt van c in Figuur 2.31-3 in één periode aflegt? Antwoord: de cirkelomtrek. Maar hoe lang is de cirkelomtrek? Over die vraag heeft men zich al in de grijze oudheid het hoofd gebroken. Het antwoord is natuurlijk ook gevonden.

De omtrek is gelijk aan $2\pi c$. Meestal schrijven we dat als $2\pi r$. Daarbij is r de straal van de cirkel. De letter komt van het Latijnse *radius*. De letterlijke betekenis van *radius* is dan ook 'straal'. Het getal π (spreek uit: pi) is in decimale notatie:

$$\pi = 3{,}14159\ldots \qquad (2.31\text{-}6)$$

De stippeltjes betekenen 'enzovoort'. De rij cijfers erachter is oneindig lang. In de praktijk volstaat meestal 3,14. De benadering $\frac{22}{7}$ wordt ook wel gebruikt, maar dat is ook geen exacte waarde.

De diameter van een cirkel is $2r$. De diameter is de afstand langs een rechte lijn van een punt op de cirkelomtrek door het middelpunt naar het punt er recht tegenover. Voorbeelden: de horizontale en verticale middellijn van de cirkel in Figuur 2.31-2. Meestal schrijven we daar D voor. $D=2r$. De omtrek van een cirkel is dus ook gelijk aan πD.

Een praktische toepassing van π is de relatie tussen de doorsnede en de diameter van een ronde draad. We weten dat de diameter 2x de straal is, dus $2r$. De doorsnede is de cirkelvormige oppervlakte die we zien als we een ronde draad netjes haaks (loodrecht) doorsnijden. We weten al dat de omtrek van die cirkel $2\pi r$ is. De oppervlakte is πr^2. Hoe bereken je nu de straal en de diameter van een draad met een doorsnede van 2 mm^2? We weten dat

$$\pi r^2 = 2\text{mm}^2 \qquad (2.31\text{-}7)$$

Beide leden delen door π geeft

$$r^2 = \frac{2\text{mm}^2}{\pi} \qquad (2.31\text{-}8)$$

Nu hebben we r^2 'vrij' staan. Worteltrekken in beide leden geeft:

$$r = \sqrt{\frac{2\text{mm}^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \text{mm} \approx \sqrt{0{,}637\ \text{mm}} \approx 0{,}800\ \text{mm} \qquad (2.31\text{-}9)$$

De diameter is $2r \approx 1{,}60$ mm.

2.31.6 Samenvatting

- De sinus van een hoek is zichtbaar te maken door de hoek op te nemen in een rechthoekige driehoek. Dan is de sinus gelijk aan de lengte van de zijde tegenover de hoek gedeeld door de schuine zijde (zie Figuur 2.31-1).
- De cosinus van een hoek is de sinus van de andere niet-rechte hoek in dezelfde rechthoekige driehoek.
- Je kunt sinus en cosinus ook zien als afbeeldingen op een rechte lijn van een punt dat ronddraait op een cirkel, zoals in Figuur 2.31-3.

- Als je de beweging op de rechte lijn uitzet tegen de veranderende hoek tussen c en b in Figuur 2.31-3, dan ontstaan de sinus- en cosinusgrafieken die zijn afgebeeld in Figuur 2.31-4.
- De fase van de cosinus loopt 90° voor op de sinus van dezelfde hoek
- Een *periode* van een sinus of cosinus is de tijd van 1 cirkelgang in Figuur 2.31-3. Praktischer is het om Figuur 2.31-4 te gebruiken. Dan is één periode de tijd die ligt tussen twee gelijke waarden waarbij de grafiek dezelfde kant op gaat of – gemakkelijker- de tijd tussen twee opeenvolgende toppen of twee opeenvolgende laagtepunten. Ter geruststelling: alle manieren leveren hetzelfde antwoord.
- π is het aantal keren dat een lengte van 2x de straal van een cirkel op de omtrek ervan past. 2 maal de straal heet meestal de diameter.
- Het getal π is afgerond 3,14159. In werkelijkheid is het een oneindig lange decimale breuk. In de praktijk volstaat vaak een afronding op 3,14.
- De omtrek van een cirkel is $2\pi r$ waarin r de lengte van de straal is. De diameter D van een cirkel is gelijk aan $2r$, zodat de omtrek ook gelijk is aan πD.
- De oppervlakte van een cirkel is πr^2.

2.32 Periode, frequentie, radialen, hoeksnelheid en cirkelfrequentie

De snelheid van een punt die een cirkelbaan beschrijft, zoals punt B in Figuur 2.31-2, kun je uitdrukken in afstand per tijd, zoals m s^{-1}. Doen we dat niet in meters maar in rondjes ofwel *perioden* per tijd, dan is die grootheid onafhankelijk van de grootte van de cirkel. Eigenlijk hebben we dat in Figuur 2.31-3 en Figuur 2.31-4 al gedaan. We hadden het alleen niet over hele perioden of cirkels, wel over graden. 1 periode was 360°.

Het aantal perioden per tijd noemen we de *frequentie*, symbool meestal f. De eenheid van frequentie is de hertz, afgekort Hz. Ook dit is een eenheid die naar een natuurkundige beroemdheid is genoemd, Heinrich Rudolf Hertz. Vandaar de hoofdletter in de afkorting. De 'z' erachter is voor het onderscheid met de Henry die we in hoofdstuk 4 zullen tegenkomen. Meer over Hertz vind je op https://nl.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz.

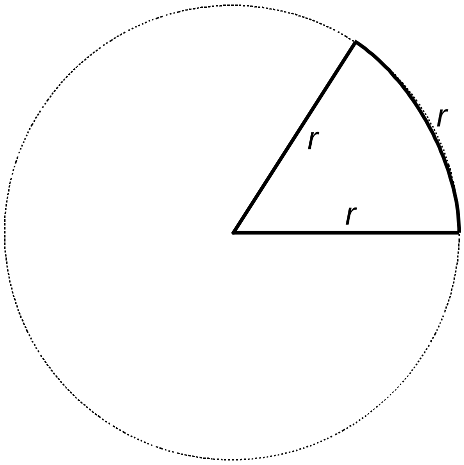
De duur T van een periode is het omgekeerde van f. Als f = 10 Hz, dan is T=0,1 s, want, er gaan 10 perioden in 1 seconde. We kunnen dus schrijven

$$f = \frac{1}{T} \qquad (2.32\text{-}1)$$

Let bij T op de hoofdletter. Meestal schrijven we voor tijd t, maar voor de periodeduur meestal T. In Hoofdstuk 5 komen perioden verder aan de orde.

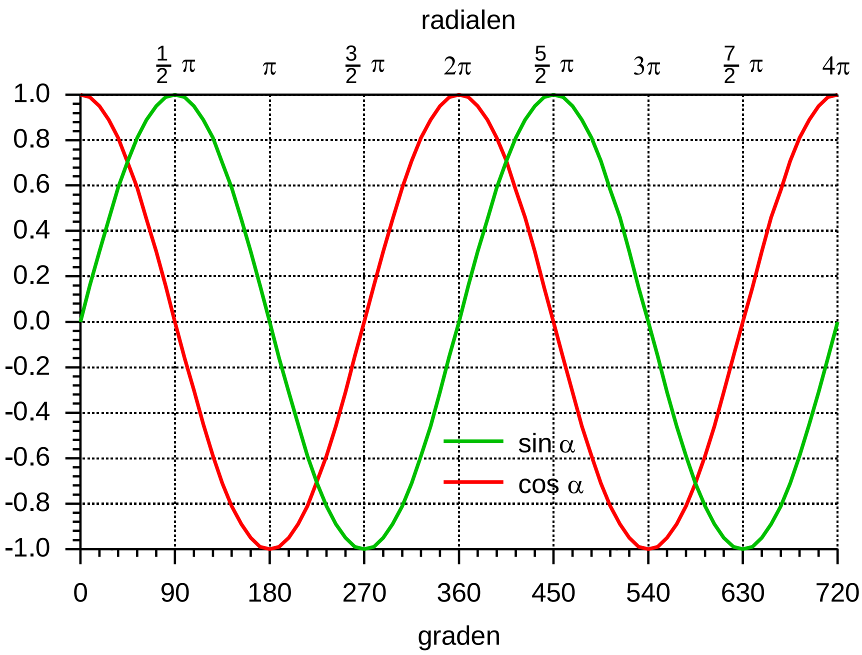
Eén keer de cirkel rond is een bocht van 360°. Nu is de graad (°) een 4000 jaar geleden door mensen van bedachte eenheid. Het is niet te verwachten dat die netjes aansluit bij ons moderne SI-eenhedenstelsel of bij wiskunde waarin sinus, cosinus of andere goniometrische verhoudingen een rol spelen. Dat doet de graad dan ook niet.

De radiaal (rad) is de echte SI-eenheid voor hoeken. 1 rad is de hoek op het middelpunt van een cirkel waarbij het stuk cirkel dat in de 'bek' van de hoek past, 1 straal lang is (Figuur 2.32-1). In graden is dat een hoek van (afgerond) 57,3°. De cirkel één keer rond is 360°. Dat is hetzelfde als 2π rad, want de cirkelomtrek is 2π maal de straal r, dus $2\pi r$.



Figuur 2.32-1. Een hoek van 1 radiaal

Een radiaal is dus een hoek, geen lengte, want de grootte van de bijbehorende cirkel doet er niet toe. Het quotiënt van de straal en het bijbehorende stuk cirkelomtrek is altijd 1. De radiaal is daarmee het getal 1 in de wereld van cirkels en hoeken. De radiaal is daarom de natuurlijke eenheid van de hoek. Je kunt hem in vergelijkingen met sin en cos vervangen door het getal 1. Voor de liefhebbers: zie https://nl.wikipedia.org/wiki/Radiaal_(wiskunde). Een hoek van ½ π rad (= 90°) kun je daarom schrijven als ½ π. De sinus van π radialen schrijf je als $\sin \pi$. Dat is hetzelfde als sin 180°. In Figuur 2.32-2 staat dezelfde sinus-cosinusgrafiek als in Figuur 2.31-4, maar nu ook met radialen op de bovenste horizontale as.



Figuur 2.32-2. Dezelfde grafiek als Figuur 2.31-4, maar nu ook met radialen (horizontale as boven).

De *hoeksnelheid* is niet het aantal rondjes per tijd, maar het aantal radialen per tijd dat punt B in Figuur 2.31-2 aflegt. De SI-eenheid van de hoeksnelheid is s^{-1}, want een radiaal is 1. In elektronische schakelingen hebben we het meestal niet over de hoeksnelheid, maar de *cirkelfrequentie*. Ook de term *hoekfrequentie* kom je tegen. Ze betekenen alle drie hetzelfde. Het symbool voor de grootheid cirkelfrequentie is de kleine Griekse letter omega: ω. De frequentie f is hele perioden per seconde. In een periode zitten 2π radialen. Dat betekent

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (2.32\text{-}2)$$

De cirkelfrequentie is van belang bij het rekenen aan schakelingen met spoelen en condensatoren die in hoofdstuk 4 en 5 aan de orde komen.

2.33 Functies

We hebben het woord steeds vermeden, maar in het voorgaande heb je kennis gemaakt met wiskundige functies. De sinus, de cosinus en de logaritme bijvoorbeeld, maar een macht, een product, quotiënt of som is het ook. Je stopt er iets in en er komt iets uit. Er is voor elke functie een vast verband tussen wat je erin stopt en wat eruit komt. Een functie is daarmee te vergelijken met een automaat waarin je bijvoorbeeld een 2-euromunt stopt en waar dan iets eet- of drinkbaars uitkomt, al dan niet met wisselgeld. In de natuurkunde stop je er getal(len) of één of meer grootheden in en er komt een ander getal of andere grootheid uit.

Die automaat stelt vaak wel eisen aan de invoer. De optelautomaat wil alleen maar getallen of gelijksoortige grootheden. De automaat voor vermenigvuldiging lust alles. Het is de alleseter onder de functies, zou je kunnen zeggen. De logaritme lust alleen maar getallen, nooit grootheden. Hij spuugt ook alleen maar getallen uit. Neem nu de decibel. De decibelautomaat is een bijzondere uitvoering van de logaritme-automaat. De decibelautomaat lust het quotiënt van twee vermogens. Een vermogen gedeeld door een ander vermogen is een getal. De bel is in wezen niet meer dan een getal, maar wel een bijzonder getal. Zo heeft elke functie zijn eigenaardigheden. Wat functies gemeenschappelijk hebben, is hun automaatkarakter. Meer niet.

2.34 Twee grondbeginselen uit de natuurkunde

2.34.1 Beginsel 1

De helft van het eerste grondbeginsel is in een paar woorden samen te vatten: “Energie gaat nooit verloren”. De andere helft houdt in dat energie niet zomaar uit het niets ontstaat.

Kortom: energie verdwijnt niet in het niets en ontstaat niet uit het niets.

Wel zijn er verschillende vormen van energie. We kennen bijvoorbeeld beweging, licht en warmte. Als de zon op een muur schijnt, wordt die warm. Dat is een omzetting van lichtenergie in warmte-energie. Verschillende soorten energie kun je in elkaar omzetten. Een moderne windmolen zet energie die in windsnelheid zit om in elektrische energie. Een ouderwetse molen maalt graan of pompt water uit een polder. Een benzinemotor zet chemische energie uit benzine en zuurstof om in bewegingsenergie. Een elektrische centrale zet chemische energie om in elektrische energie.

Als je iets optilt, voeg je daaraan energie toe. Als je het vervolgens laat vallen, wordt die energie omgezet in valsnelheid (en misschien in het kapotgaan van wat je had opgetild). Al die verschillende vormen van energie kun je in elkaar omrekenen. Zo kunnen we bij elke vorm van energieomzetting bepalen hoeveel energie waarin gaat zitten. We hebben daar een klein voorbeeldje van gezien bij de decibel in 2.23. Daar was een Joule de energie die nodig is om een gram water met 0,239 K op te warmen of een gewicht van 1 kg 10,2 cm op te tillen.

Wat niet kan is ergens een energiehoeveelheid vergroten zonder die aanvullende energie ergens anders vandaan te halen.

We hebben gezien dat vermogen energie per tijd is. Als we een zender voeden met een vermogen van 100 Watt, wordt die energie niet opgehoopt in de zender. Hij verdwijnt weer als uitgezonden vermogen en (helaas) ook als warmte. Op lange termijn gezien sluit de energiebalans van onze zender op 0.

Dit beginsel staat bekend onder de naam ‘Eerste hoofdwet van de thermodynamica’.

Het is niet zo, dat we alle vormen van energie onbekommerd in elkaar kunnen omzetten. Dat wordt belemmerd door:

2.34.2 Beginsel 2

Kort gezegd komt dit beginsel erop neer dat ordening niet kan toenemen. Je kunt ook zeggen dat chaos niet kan afnemen.

De meest chaotische vorm van energie is warmte. Warmte is snelheidsenergie van atomen en moleculen die alle kanten op bewegen. Omzetting van warmte in bewegingsenergie van bijvoorbeeld een auto betekent omzetting van een chaotische naar een ordelijke vorm van energie. Daarvoor moet compensatie zijn. Die zit in het energieverschil tussen het inwendige van de motor en de buitenwereld. Temperatuurverschil is een vorm van ordening. Door omzetting in bewegingsenergie neemt het temperatuurverschil met de buitenwereld af. Daar zit de compensatie.

Als een auto remt, wordt de snelheidsenergie omgezet in warmte-energie. Die warmte-energie verdwijnt daarna in de lucht die wordt opgewarmd. Een elektrische of hybride auto kan bij remmen via een slim systeem de remenergie voor een groot deel omzetten in elektrische energie door een accu er een stukje mee op te laden. 100% omzetting kan niet; warmte eist altijd zijn deel op.

Kortom, bij elke omzetting van energie wordt energie gemorst via het vrijkomen van warmte. Dat geldt ook voor geluidstrillingen. Zelfs een goed gesprek eindigt als warmte.

Elk elektrisch apparaat warmt op als het aanstaat. Bij een bepaalde temperatuur verliest het evenveel warmte aan zijn omgeving als er zich binnenin warmte ontwikkelt. Dan wordt het apparaat niet meer warmer. Als het wordt uitgezet koelt het af tot het de temperatuur van zijn omgeving heeft bereikt. Temperatuurverschil is, zoals gezegd, ordening. Bij het afkoelingsproces neemt de ordening af.

Dit betoog komt erop neer dat we van een toegevoerd vermogen nooit 100% rendement kunnen halen. Rendement is het deel van toegevoerd vermogen dat voor het doel van het apparaat wordt gebruikt. Er gaat altijd energie verloren aan warmte. De enige uitzondering is een elektrische kachel, want die is bedoeld om warmte te maken.

Dit beginsel staat bekent als de ‘Tweede hoofdwet van de thermodynamica’.

Er is nog een derde hoofdwet, maar kennis daarvan is voor ons doel niet nodig. Wie nog eens een relatief eenvoudige beschrijving wil bekijken, klikt hier. Wie wat dieper op de zaak wil ingaan, klikt hier.

Samenvatting

- Energie verdwijnt niet in het niets
- Energie ontstaat niet uit het niets
- Je kunt bij omzetting van energie in een andere vorm niet winnen door energie ‘bij te maken’
- Je kunt bij omzetting van geordende energie in een andere geordende vorm zelfs niet gelijkspelen. Je verliest altijd een deel aan warmte.

2.35 Antwoorden bij de opgaven

2.35.1 Uitwerking van Opgave 2-1

De opgave: In de zin ‘De seconde duurt één seconde’ staan

a. Twee eenheden

b. Twee grootheden

c. Eerst een eenheid en daarna een grootheid

Uitwerking

“De seconde” gaat over de eenheid seconde. “Één seconde” is 1 seconde. Dat is een getal maal een eenheid en dus een grootheid. Er staat dus een eenheid (“de seconde”), gevolgd door een grootheid (“één seconde”).

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

De volgende uitwerking staat op de volgende bladzijde. Zo voorkom je dat je ongewild al het antwoord op de volgende opgave krijgt. Wil je terug naar opgave 2-1, klik op de pijl “terug naar de opgave”; voor de volgende opgave klik je op de pijl “Naar de volgende opgave”.

2.35.2 Uitwerking van Opgave 2-2

Waarom kort men de minuut niet af met ‘m’?

Uitwerking

De afkorting ‘m’ staat voor ‘meter’. Omdat de meter een officiële SI- eenheid is en de minuut niet, krijgt de meter hier voorrang. De minuut moet het doen met ‘min’ of voluit worden geschreven.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.3 Uitwerking van Opgave 2-3

Welke voorvoegsels horen bij een biljoen en bij een biljoenste?

Uitwerking

Het voorvoegsel voor biljoen is ‘tera’, afgekort T. Denk bijvoorbeeld aan een harde schijf met een opslagcapaciteit van 1 TB, waarbij ‘B’ voor Byte staat (een kleine ‘b’ staat voor ‘bit’; het verschil komt pas aan de orde in hoofdstuk 11).

Het voorvoegsel voor een biljoenste is ‘pico’, afgekort p. Het komt vooral voor bij condensatoren (hoofdstuk 4). De eenheid F, farad, is voor dagelijks gebruik in de elektronica nogal aan de grote kant. Daarom komen condensatorwaarden in pF veel voor.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.4 Uitwerking van Opgave 2-4

Een bekende lengte-eenheid (maar geen SI-eenheid) die voor afstanden bij atomen en moleculen soms wordt gebruikt, is de ångström (ongeveer uitgesproken als ‘ongstreum’), afgekort Å. 1Å is 100 pm. Hoeveel nm is dat? En hoeveel fm?

Uitwerking

100 pm=0,1 nm=100 000 fm. Tabel 2.4-2 moet hierbij kunnen helpen.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.5 Uitwerking van Opgave 2-5

De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 miljoen km. Hoeveel m is dat? En hoeveel Gm?

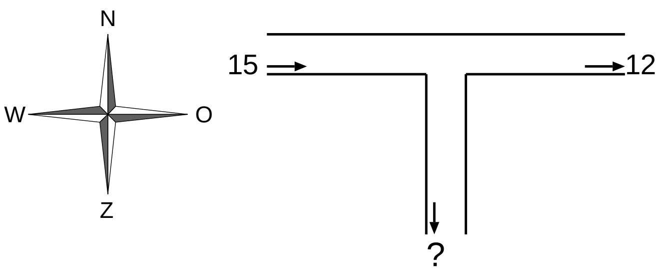
Uitwerking

150 miljoen km is in cijfers 150 000 000 km. Om van km m te maken, moeten er drie nullen bij: 150 000 000 000 m, dus in meters: 150 met negen nullen aan meters. Dat is 150 miljard m en dat is weer 150 Gm, want 'giga' staat voor 1 miljard.

Terug naar de opgave

2.35.6 Uitwerking van Opgave 2-6

Hieronder is een weg met T-kruising aangegeven. In 10 minuten tijd zijn er links van de kruising 15 voertuigen geteld die van west naar oost reden. Rechts van de kruising waren het er in diezelfde 10 minuten 12. Er waren geen voertuigen die van oost naar west reden en er is geen voertuig op de kruising blijven staan. Hoeveel voertuigen zijn in die 10 minuten rechtsaf geslagen?



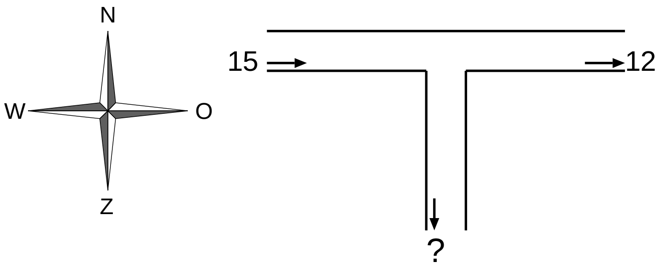
Uitwerking

Als er van west naar oost 15 voertuigen de kruising op rijden en er rijden er 12 vandaan, zijn we 15-12=3 voertuigen van de west-oost route kwijtgeraakt. Die moeten dus de tak naar het zuiden hebben genomen.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.7 Uitwerking van Opgave 2-7

Dezelfde berekening kun je ook doen met waterleidingbuizen, rivieren of stroomdraden. Lees de getallen in de figuur bij Opgave 2-6 bijvoorbeeld als liters per seconde. Hoeveel liter per seconde loopt er de leiding naar beneden in? (Hieronder nogmaals het plaatje van Opgave 2-6)



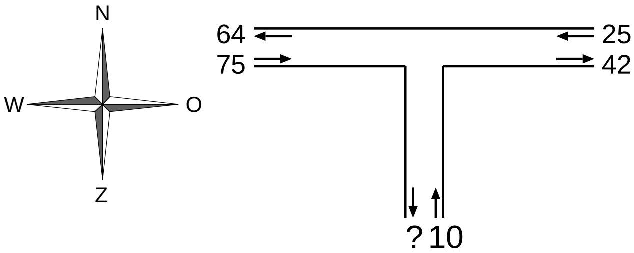
Uitwerking

De vraag komt erop neer dat we aantallen voertuigen per 10 minuten vervangen door evenveel liters per seconde. Dan gaan er dus 3 liter per seconde de leiding naar beneden in.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.8 Uitwerking van Opgave 2-8

Het is niet erg waarschijnlijk dat op de west-oost route in Opgave 2-6 alle voertuigen dezelfde kant op rijden. Daarom doen we die opgave nog eens met tweerichtingsverkeer.



Aanwijzing: bereken per tak van de kruising eerst hoeveel verkeer er netto in of uit rijdt. Denk niet dat iets vergelijkbaars in elektrische schakelingen niet kan. Het kan, maar je meet per tak de netto stroom!

Uitwerking

Links gaan er in 10 minuten netto 75-64=11 voertuigen richting de kruising. Rechts zijn dat 25-42=-17 voertuigen. Vanuit het zuiden rijden er 10 voertuigen naar de kruising. Naar de kruising zijn er dan netto 11-17+10=4 voertuigen gereden. Op de plek van het vraagteken komt dus 4 te staan. Je kunt het vraagstuk ook in één keer oplossen:
Op de plek van het vraagteken moet de som van alle voertuigstromen komen te staan. Een minteken is hier niet nodig, want de pijl wijst al van de kruising af. In Opgave 2-6 is al gegeven dat er geen voertuig op de kruising achterblijft. Voor het vraagteken zetten we het symbool *a*, maar elke andere letter mag ook (leestekens gebruiken we nooit als symbool). Dus *a* =75-64+25-42+10=4 voertuigen in 10 min. Zo kan het met enig vertrouwen in onze rekentechniek dus ook.

Terug naar de opgave

2.35.9 Uitwerking van Opgave 2-9

Een veld is 1 km lang en 300 m breed. Hoeveel m^2 (vierkante meter) is dat?

Uitwerking

Zet eerst de km om in m. Dan hebben we 1 km=1000 m. Dan 1000 m vermenigvuldigen met 300 m. Dat levert 300 000 m^2.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.10 Uitwerking van Opgave 2-10

Door een draad loopt een stroom van 1A. Dat is elke seconde 1 C. Hoeveel C is er in een minuut doorheen gelopen?

Uitwerking

1 minuut is 60 s. 60 maal 1 C is 60 C.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.11 Uitwerking van Opgave 2-11

Een volgeladen accu blijkt 10 uur lang een stroom van 0,5 A te kunnen leveren. Hoe groot is de capaciteit van de accu?

Uitwerking

10 h * 0,5 A* = 5 Ah.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.12 Uitwerking van Opgave 2-12

Hoeveel is 0.37? En 2.(-3)? En (-2).(-3)?

Uitwerking

In de vermenigvuldiging 0.37 wordt vermenigvuldigd met 0, dus is de uitkomst 0.

De vermenigvuldiging 2.(-3) bevat 1 getal met een minteken. De uitkomst is dus negatief, want 1 is een oneven getal. Dan mogen we ook schrijven -2.3 en dat is -6.

De vermenigvuldiging (-2).(-3) bevat twee mintekens, dus de uitkomst is positief. Dan hebben we dus hetzelfde als 2.3, uitkomst 6.

Terug naar de opgave

2.35.13 Uitwerking van Opgave 2-13

Op een amateurbeurs worden zakjes met geheimzinnige onderdelen aangeboden voor 2 euro per stuk. De verkoper begon met een lege kas. Aan het eind van de beurs heeft hij 157 euro in kas. Uit de kas heeft hij in totaal 5 euro uitgegeven aan koffie en soft ice. Hoeveel zakjes onderdelen heeft hij verkocht?

Uitwerking

Hij moet 157 +5 euro = 162 euro hebben ontvangen. Dat zijn 162/2 = 81 zakjes.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.14 Uitwerking van Opgave 2-14

Hoeveel is: 0/2, 2/0, 15/3, (-15)/3, 15/(-3) en (-15)/(-3)?

Uitwerking

0/2=0; 2/0=∞ (oneindig een 8 op zijn kant dus); 15/3=5; (-15)/3=-5, (-15)/(-3) = 5.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.15 Uitwerking van Opgave 2-15

Een accu van 15 Ah wordt gebruikt om een lamp te voeden die 1A gebruikt. Hoe lang hoort de accu het vol te houden als die bij het begin volledig is opgeladen? En als de lamp 3A gebruikt? Ga uit van een accu waarbij de capaciteit niet afhangt van de geleverde stroomsterkte (dat is in werkelijkheid niet helemaal zo).

Uitwerking

15 uur, want 15/1 is 15. Bij 3 A duurt het maar 5 uur, want 15/3 is 5.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.16 Uitwerking van Opgave 2-16

Is er verschil in uitkomst tussen $a.(b/c).d$ en $(a.b).d/c$? En tussen $a.(b/c).d$ en $a/c.b.d$?

Uitwerking

Tussen $a.(b/c).d$ en $a.b.d/c$ is er geen verschil in uitkomst. Zie het als een vermenigvuldiging van a, b/c en d. Daarbij is de volgorde niet van belang en het maakt niet uit of je nu a, b, d of abd door c deelt. Probeer het maar met zelf bedachte getallen.

Met $a.(b/c).d$ en $a/c.b.d$ is het bij $a.(b/c).d$ duidelijk wat we moeten doen: reken b/c uit en vermenigvuldig de uitkomst met a en met d. Bij $a/c.b.d$ maakt het verschil of we eerst cbd uitrekenen en delen op a, of a delen door c en de uitkomst vermenigvuldigen met b en met d. Als je alles netjes van links naar rechts afwerkt is er geen verschil in uitkomst, maar verwarrend is het wel. Probeer ook dit met zelf bedachte getallen.
Als je a/c schrijft met een horizontale deelstreep, wordt het duidelijker: $a/c.b.d$ wordt dan $\frac{a}{c}bd$. Dat mag je ook schrijven als $\frac{abd}{c}$ en dan is het helemaal duidelijk.

Terug naar de opgave

2.35.17 Uitwerking van Opgave 2-17

Bereken:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}$$

Uitwerking

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1.4}{3.4}+\frac{1.3}{4.3}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{3.10}{5.10}+\frac{3.5}{10.5}=\frac{30+15}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1.8}{6.8}+\frac{3.6}{8.6}=\frac{8+18}{48}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2.2}{3.2}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}-\frac{5}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{7}{10}-\frac{4}{5}=\frac{7}{10}-\frac{8}{10}=-\frac{1}{10}$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.18 Uitwerking van Opgave 2-18

Bereken:

$$5 : \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6} . \frac{12}{14}$$

$$\frac{5}{3} . \frac{9}{13} . \frac{26}{15}$$

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{3}$$

Uitwerking

$$5 : \frac{1}{2} = 5 . \frac{2}{1} = 10$$

$$\frac{7}{6} . \frac{12}{14} = \frac{7}{1} . \frac{1}{7} = 1$$

$$\frac{5}{3} . \frac{9}{13} . \frac{26}{15} = \frac{1}{3} . \frac{9}{13} . \frac{26}{3} = \frac{1}{1} . \frac{26}{13} = 2$$

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{3} = \frac{5}{12} . \frac{3}{5} = \frac{1}{12} . \frac{3}{1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Terug naar de opgave

2.35.19 Uitwerking van Opgave 2-19

Schrijf als decimale breuk met hoogstens 6 cijfers achter de komma): 17 397/10, 17 397/100, 17 397/1000, 25/1000, 50/4, 25/11, 25/3, 25/7.

Uitwerking

$$17\,397/10 = 1\,739{,}7$$

$$17\,397/100 = 173{,}97$$

$$17\,397/1000 = 17{,}397$$

$$25/1000 = 0{,}025$$

$$50/4 = 12{,}5$$

$$25/11 = 2{,}272727$$

$$25/3 = 8{,}333333$$

$$25/7 = 3{,}571429$$

De drie laatste zijn afgerond zoals het hoort!

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.20 Uitwerking van Opgave 2-20

Een meetuitkomst is 4,23 eenheden. Er wordt een berekening mee gedaan op een zakrekenmachine die de uitkomst 6,761347890 geeft. Welke cijfers zijn hier betekenisloos en waarop rond je de uitkomst op een zinvolle manier af?
Doe hetzelfde voor een uitkomst 6,76561399; voor een uitkomst 6,76497865 en voor een uitkomst 7,79718223.

Uitwerking

De meting gaf drie cijfers. In de uitkomst van de berekening moeten dat er ook drie zijn. Als we de betekenisvolle cijfers in zwart zetten en de rest in rood, is de uitkomst 6,761347890. Omdat 6,76 dichter bij de uitkomst ligt dan 6,77, wordt het na afronding 6,76.
Bij 6,76561399 ligt de uitkomst het dichtst bij 6,77 en dus wordt afgerond op 6,77. Dat geldt niet voor 6,76497856, waar dan ook wordt afgerond op 6,76.
Voor 7,79718223 wordt afgerond op 7,80 en niet op 7,8.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.21 Uitwerking van Opgave 2-21

Een radio-ontvanger wordt verkocht voor € 800. Een maand later is hij in de aanbieding voor € 720. Hoeveel korting in % van de oorspronkelijke prijs is dat? Een hoe groot is de korting als de prijs in de aanbieding € 600 zou zijn?

Uitwerking

Bij een verkoopprijs van € 720 is de korting € 80. Dat is $^{80}/_{800} = {}^{10}/_{100} = 10\%$ van de oorspronkelijke € 800.
Bij een verkoopprijs van € 600 gaat er € 200 van de prijs van € 800 af. Dat is $^{200}/_{800} = {}^{25}/_{100} = 25\%$. Het kan ook zo: $^{200}/_{800} = 0{,}25 = 25\%$.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.22 Uitwerking van Opgave 2-22

Een zender neemt bij zenden 300 Watt op uit het lichtnet. De antenne krijgt 100 Watt toegevoerd. Bereken het rendement in % van de opname uit het lichtnet.

Uitwerking

Van de oorspronkelijke 300 W die het apparaat in is gegaan, blijft 100 W over voor datgene waarvoor het apparaat bedoeld was, namelijk zenden. Rendement is wat je ergens aan nuttig vemogen uithaalt, gedeeld door wat je erin hebt gestopt. Dat komt neer op 300 W erin, 100 W aan nuttig vermogen eruit. $^{100\ W}/_{300\ W} = 0{,}33333 \ldots ..$ (de rij puntjes betekent doorgaan tot oneindig). Dat komt afgerond neer op 33,3% of 33%, al naar gelang de nauwkeurigheid van de meting.

Terug naar de opgave

2.35.23 Uitwerking van Opgave 2-23

Hoeveel is: x^0 ; 3^2 ; 3^3 ; $2^4.2^{-2}$; $3^5.3^{-4}$; 2^{-2}

Uitwerking

$$x^0 = 1$$

$$3^2 = 3.3 = 9$$

$$3^3 = 3.3.3 = 27$$

$$2^4.2^{-2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

$$3^5.3^{-4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

Terug naar de opgave

2.35.24 Uitwerking van Opgave 2-24

Schrijf als macht: $\sqrt{10}$; $\sqrt[2]{10}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[3]{a}$

Uitwerking

$$\sqrt{10} = 10^{1/2}$$

$$\sqrt[2]{10} = 10^{1/2}$$

$$\sqrt[4]{10} = 10^{1/4}$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$$

Terug naar de opgave

2.35.25 Uitwerking van Opgave 2-25

Bereken 7+5-8*2+4 en 7+5-8*(2+3)

Uitwerking

$$7 + 5 - 8 * 2 + 4 = 7 + 5 - 16 + 4 = 0$$

$$7 + 5 - 8 * (2 + 3) = 7 + 5 - 8.5 = 12 - 40 = -28$$

In de tweede deelopgave zijn (opzettelijk) twee verschillende vermenigvuldigtekens gebruikt

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.26 Uitwerking van Opgave 2-26

Bereken 2^2+3-6 en 2^{2+3}-6

Uitwerking

$$2^2 + 3 - 6 = 2.2 + 3 - 6 = 4 + 3 - 6 = 7 - 6 = 1$$

$$2^{2+3} - 6 = 2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$$

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.27 Uitwerking van Opgave 2-27

Bereken 5.6/3.5 en 5.6/(3.5)

Uitwerking

5.6/3.5 kun je ook schrijven als 5*6/3*5. Uitwerken:

$$5 * \frac{6}{3} * 5 = 5 * 2 * 5 = 50$$

De tweede deelopgave gaat zo:

$$\frac{5.6}{3.5} = \frac{30}{15} = 2$$

Het is dus opletten met de voorrangsregels!

Terug naar de opgave

2.35.28 Uitwerking van Opgave 2-28

De baan van de aarde om de zon is ongeveer 950 miljoen km lang. Schrijf die afstand in km met niet meer dan 3 cijfers en een macht van 10.

Uitwerking

950 biljoen km is 950.10^6 km, 95.10^7 km of $9{,}5.10^8$ km (alle drie goed; de laatste heeft de voorkeur)

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.29 Uitwerking van Opgave 2-29

De golflengte van rood licht is ongeveer 700 nm. Schrijf deze grootheid in m met een macht van 10.

Uitwerking

700 nm is 700.10^{-9} m. Dat is hetzelfde als 70.10^{-8} m en als 7.10^{--7} m. Gebruik het liefst de laatste, maar de rest is niet fout.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.30 Uitwerking van Opgave 2-30

Als log 3≈0,48 en log 2≈0,30, hoeveel is dan log 24?

Uitwerking

De eerste vraag is, een vermenigvuldiging te vinden met alleen 2 en 3 erin die 24 oplevert. Dat doe je door het zogenoemde ‘ontbinden in factoren’. Dat klinkt ingewikkelder dan het is. Hier komt het:

24 is een even getal, dus dat kun je delen door 2 en dan blijft er 12 over.

Ook 12 is een even getal. Nog een keer delen door 2 en er blijft 6 over.

Ook 6 is een even getal; delen door 2 levert 3 op.

Aan 3 valt niets meer te delen.

Dan hebben we 2*2*2*3 en dat is inderdaad 24. Korter kan ook: $2^3.3=24$.

Dan is $\log(24) = 3\log(2) + \log(3) \approx 0{,}90 + 0{,}48 \approx 1{,}38$

Opmerking: de haakjes achter de log zijn niet verplicht, maar in een vergelijkingseditor zoals hier gebruikt, wordt ‘log’ dan meteen rechtop gezet en niet gezien als een variabele. In de oorspronkelijke opgave (boven) staan ook geen haakjes.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.31 Uitwerking van Opgave 2-31

Hoeveel is log 2^{10}? En hoeveel is 2^{10}?

Uitwerking

We gaan uit van het gegeven in de vorige opgave: log 2≈0,30

log 2^{10}= 10log 2 = 3.

Dan is $2^{10} = 10^3 \approx 1000$.

In werkelijkheid is 2^{10} = 1024. Het verschil komt door de afronding van log 2.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.32 Uitwerking van Opgave 2-32

Een zendantenne straalt 100 W uit. Een ontvangstantenne ergens in de wereld ontvangt daarvan 10 pW. Bereken eerst de verzwakking tussen zend- en ontvangstantenne als macht van 10 (gebruik als je dat wilt Tabel 2.4-2). Bereken vervolgens de verzwakking van zender naar ontvanger in dB.

Uitwerking

10 pW = 10.10^{-12} W=10^{-11} W.

Van 100 W= 10^2 W is dus op de ontvangstantenne 10. 10^{-2} W is 10^{-11} W overgebleven. Van $10^2 \rightarrow 10^{-11}$ is een versterking van $10^{-11-2} = 10^{-13}$ of, als je dat liever ziet, een verzwakking met een factor 10^{13}. Dat is hetzelfde als een verzwakking met 130 dB of een versterking met -130 dB, net hoe je voorkeur is.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.33 Uitwerking van Opgave 2-33

Een signaal wordt achtereenvolgens versterkt door twee versterkers. De eerste versterkt 9 dB en de twee doet er nog eens 10 dB bovenop. Bij de overdracht van de eerste naar de tweede versterker treedt een verlies van 1 dB op. Hoe groot is de totale versterking in dB?

Uitwerking

De twee versterkers versterken 9 dB en 10 dB, dat is samen 19 dB. Er treedt een verlies op van 1 dB, zodat er 19 dB – 1 dB = 18 dB overblijft.

In aantal malen versterking is dat $10^{1,8} \approx 63$ maal.

Terug naar de opgave

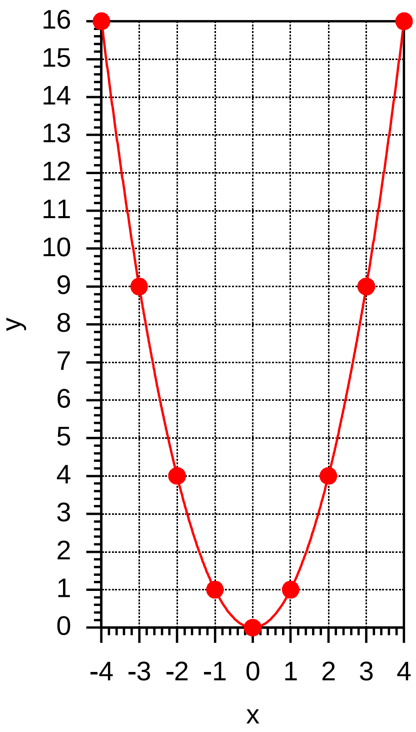
2.35.34 Uitwerking van Opgave 2-34

Teken op millimeterpapier (klik op het woord en druk af) de grafiek van de tabel met waarden voor *x* en *y*.

x	*y*
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Uitwerking

De grafiek is de grafiek van $y=x^2$. Hij moet eruitzien als het plaatje hiernaast. Dat is met de computer gemaakt en er is een vloeiende curve door de punten getrokken, maar als je rechte lijnen tussen opeenvolgende punten hebt gemaakt, heb je de bedoeling begrepen en is er dus niets mis mee.



Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.35 Uitwerking van Opgave 2-35

Vind uit de vergelijking x-2= 10 de waarde van x door bij beide leden 2 op te tellen.

Uitwerking

Dit doen we in zo klein mogelijke stapjes:

$$x - 2 = 10$$

$$x - 2 + 2 = 10 + 2$$

$$x + 0 = 12$$

$$x = 12$$

Dit komt neer op verplaatsen van -2 van het linker- naar het rechterlid met gelijktijdige omkering van het teken, dus van – naar +.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.36 Uitwerking van Opgave 2-36

Hoeveel moet je in de vergelijking $x + 6 = 15$ bij beide leden optellen om de waarde van x te vinden?

Uitwerking

In zo'n geval wil je eindigen met een vergelijking met de vorm $x =$ iets

Om dat in de vergelijking $x + 6 = 15$ te bereiken, moet van het linker lid het getal 6 worden afgetrokken. Dan blijft alleen x over. Om het = teken geldig te laten blijven, moet die 6 ook daarvan worden afgetrokken:

$$x + 6 - 6 = 15 - 6$$

En dan:

$$x = 9$$

Omdat de vraag was hoeveel er bij beide leden moet worden opgeteld, is het antwoord daarop niet 6, maar -6.

Terug naar de opgave Naar de volgende opgave

2.35.37 Uitwerking van Opgave 2-37

Bereken x uit $7x$=14 en uit x/2=1.

Uitwerking

$$7x \;=\; 14$$

Om links x te krijgen, moet worden gedeeld door 7:

$$x = {}^{14}/_{7} = 2$$

Nu de andere deelopgave.

$$^{x}/_{2} \;=\; 1$$

Ook hier willen we links x overhouden. Dat vraagt vermenigvuldigen met 2:

$$x = 1.2 = 2$$

Terug naar de opgave

